






MATH.-
STAT.
LIBRARY



DAS GESETZ

DER

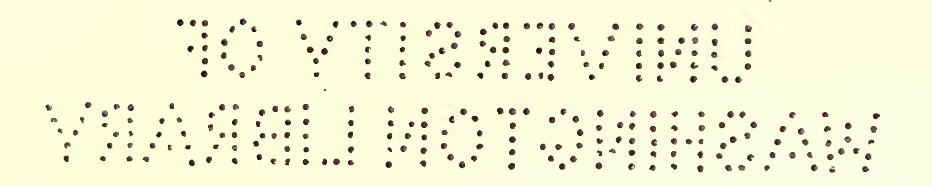
KLEINEN ZAHLEN

VON

Dr. L. VON BORTKEWITSCH
PRIVATDOZENT IN STRASSBURG



LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1898





MEINEM LEHRER

WILHELM LEXIS

GEWIDMET

L. B.

Vorrede.

Die vorliegende Abhandlung stellt den ersten Versuch dar, statistischen Reihen, welche aus kleinen absoluten Zahlen bestehen, vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus näher zu treten. Faſst man z. B. irgend einen der kleinsten deutschen Bundesstaaten ins Auge, so pflegen darin in jedem Jahr selten über 10 weibliche Selbstmorde vorzukommen. In manchem Kalenderjahr gelangt überhaupt kein einziger solcher Fall zur Verzeichnung. Die detaillirten statistischen Nachweise unserer Zeit bieten recht viele Beispiele von statistischen Reihen der gesagten Art. Solche Reihen sind aber von der wissenschaftlichen Statistik bisher kaum eines Blickes gewürdigt worden, und zwar aus dem Grunde, weil bei so kleinen Zahlen die Wirkung der zufälligen Ursachen zu stark hervortrete. Hier kommt es in der That nicht selten vor, daſs von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Zahlen die eine um ein vielfaches die andere übertrifft, ja, daſs das Verhältnis der einen dieser Zahlen zu der anderen (wenn letztere gleich Null ist) durch den Zahlenwert unendlich ausgedrückt wird. Da nun aber jede Folgerung aus Zahlen, welche eine statistische sein will, sich stets auf die Voraussetzung gründe, daſs sich die Wirkungen der zufälligen Ursachen ausgleichen, so seien, meint man, jene kleinen Zahlen an sich offenbar wertlos.

Soweit es sich um die Ergründung desjenigen Theiles der Erscheinungen handelt, welcher von den Wirkungen der zufälligen Ursachen gewissermaſsen als unabhängig gedacht ist, erscheint die Geringschätzung der kleinen Zahlen als vollkommen begründet. Nicht aber, wenn es darum zu thun ist, gerade die Gesetze des Zufalls an den statistischen Daten zu untersuchen, d. h. die Frage zu prüfen, ob die Vorstellungen und Lehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik anwendbar seien. Denn es ist ein methodologischer Grundsatz jeder Erfahrungswissenschaft, die Bedingungen der Erfahrung stets so zu gestalten, daſs die Wirkungen des Faktors, welcher zu erfassen und zu erforschen ist, möglichst zur Geltung gelangen.

Dieser Gedanke hat den Verfasser bei der Untersuchung geleitet, deren mathematische Grundlegung den Gegenstand des ersten Kapitels bildet. Im zweiten Kapitel ist an der Hand der entwickelten Formeln versucht worden, über einige Daten der Selbstmord- und der Unfall-



statistik, welche sich als Reihen kleiner Zahlen darstellen, das Licht der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu verbreiten. Es ergab sich, dafs die bei den untersuchten Reihen gefundenen Schwankungen den Voraussagungen der Theorie fast vollständig entsprechen, worin eben das Gesetz der kleinen Zahlen besteht.

Es galt nun, dieses für die Frage der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Statistik günstige Resultat mit dem anderen scheinbar ungünstigen in Einklang zu bringen, welches darin zum Ausdruck kommt, dafs die grofsen Ereigniszahlen bezw. die aus grofsen Ereigniszahlen abgeleiteten Verhältniszahlen der Statistik, seltene Fälle ausgenommen, der Unterwerfung unter die Formeln des Poisson'schen Gesetzes der grofsen Zahlen notorisch Trotz bieten. Hierzu diente dem Verfasser die in der Hauptsache aus einem Artikel von Lexis übernommene, aber in etwas abweichender Weise begründete Theorie des Fehlerexcedenten, welcher das dritte Kapitel gewidmet ist. Es sei hier vor einer Vermengung des dieser Theorie zu Grunde gelegten Schemas einer wechselnden Wahrscheinlichkeit mit dem von Poisson behandelten Fall veränderlicher Chancen ausdrücklich gewarnt.

Die Theorie des Fehlerexcedenten liefert den Schlüssel zur Erklärung jenes scheinbaren Widerspruches zwischen dem Verhalten der grofsen und dem Verhalten der kleinen Ereigniszahlen. Die nämliche Theorie in Verbindung mit den im zweiten Kapitel vorgebrachten Thatsachen vermag ferner der Auffassung, wonach die statistischen Zahlen ein Ergebnis gewisser Allgemeinbedingungen des Geschehens wären, in welche zufällige Ursachen hineinspielen, eine Stütze zu leihen und auf diese Weise jene Vorstellung von einer spezifisch-statistischen Gesetzmäfsigkeit, welche in Folge der Mifsgriffe Quetelet's und seiner Anhänger fast jeden Kredit verloren zu haben schien, wieder zur Geltung zu bringen.

Vielleicht wird der Leser finden, dafs die Basis, auf welche sich eine Schlufsfolgerung von so grofser Tragweite aufbauen will, keine hinreichend breite und feste sei. Darüber wird sich eventuell discutieren lassen. Möge nur das Werkchen, das hiermit der Öffentlichkeit übergeben wird, auf die Pflege der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung belebend einwirken und dazu beitragen, für dieses Wissensgebiet weitere Kreise zu interessieren! Dafür sollte durch die Herausgabe der Arbeit in Form einer selbständigen Brochüre mit gesorgt werden.

Den 12. November 1897. **L. B.**



Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

§ 1.

Bezeichnet p die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines bestimmten Ereignisses A und $q = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeit des Nichteintretens von A bei einem Versuch, so stellt

$$(1) \qquad \frac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{1\cdot 2\cdots x} p^x q^{n-x}$$

die Wahrscheinlichkeit des $x$maligen Eintretens von A bei n Versuchen dar.

Läfst man die Zahl n in infinitum anwachsen und p bis auf Null herabsinken und zwar so, dafs das Produkt $np = m$ dabei stets unverändert bleibt, so wird sich (1) dem Grenzwert

$$(2) \qquad w_x = \frac{m^x e^{-m}}{1\cdot 2\cdots x}$$

nähern.[1]) Die Formel setzt voraus, dafs die Zahl x im Verhältnis zu der Zahl n klein ist.

Die Gröfse m, welche, ihrem Begriff nach, positiv sein mufs, aber sowohl eine ganze Zahl als ein echter oder unechter Bruch sein kann, drückt die mathematische Erwartung der Zahl der Fälle aus, bei denen das Ereignis A unter n Fällen oder Versuchen vorkommt.[2]) Die Gröfse m besitzt zugleich die Eigenschaft, mit der ganzen Zahl μ, welche so zu wählen ist, dafs w_μ unter den Wahrscheinlichkeiten $w_0, w_1, w_2 \ldots$ die gröfste ist, durch die Ungleichungen bezw. Gleichungen

$$m - 1 \leqq \mu \leqq m$$

verknüpft zu sein. Aus (2) erhält man in der That

$$(3) \qquad w_x = \frac{m}{x} w_{x-1},$$

woraus zu folgern ist, dafs w_x so lange anwächst, bis x gröfser als m

1) Zu vergleichen Poisson, Recherches sur la probabilité des jugements, Paris 1837. n° 81, p. 205—207.

2) S. Anlage 1, (5).

wird. Ist m eine ganze Zahl, so giebt es demnach zwei Maximalwerte von w_x, nämlich w_{m-1} und w_m. Wenn hingegen m durch einen Bruch ausgedrückt wird, so erreicht w_x das Maximum bei demjenigen Wert von x, welcher zwischen $m-1$ und m enthalten ist. Das Eintreten von A bei μ Versuchen aus n ist somit das wahrscheinlichste Ergebnis der Versuchsserie.

Man verabrede sich, die Differenz $x-m$ den Fehler des Einzelergebnisses x oder kürzer den Fehler von x zu nennen. Die mathematische Erwartung dieses Fehlers ist 0.[1] Ein anderer Wert wird sich für die mathematische Erwartung des absoluten Betrags desselben Fehlers ergeben. Man wolle diese Gröfse, welche auch der mittlere arithmetische Fehler von x genannt wird, mit α bezeichnen. Da die mathematische Erwartung eines positiven Fehlers von x der positiv genommenen mathematischen Erwartung eines negativen Fehlers von x gleich ist, so braucht man nur letztere mit 2 zu multiplizieren, um α zu gewinnen:

$$\alpha = 2\sum_{x=0}^{x=\mu}(m-x)\,w_x.$$

Aus (3) hat man aber

$$xw_x = mw_{x-1}.$$

Daher

$$\alpha = 2m\left(\sum_{x=0}^{x=\mu} w_x - \sum_{x=1}^{x=\mu} w_{x-1}\right) = 2mw_\mu \tag{4}$$

oder

$$\alpha = \frac{2e^{-m}m^{\mu+1}}{1\cdot 2\cdots\mu}. \tag{5}$$

Unter dem mittleren quadratischen Fehler von x, den wir mit $\varepsilon(x)$ bezeichnen werden, versteht man die Quadratwurzel aus der mathematischen Erwartung der Gröfse $(x-m)^2$. Verabredet man sich, die mathematische Erwartung einer Gröfse a in Folgendem mit $E(a)$ zu bezeichnen, so läfst sich schreiben:

$$E\{(x-m)^2\} = \{\varepsilon(x)\}^2.$$

Man findet $\{\varepsilon(x)\}^2$, indem man in (10) der Anlage 1, entsprechend der Annahme, dafs p eine unendlich kleine Gröfse ist, $q=1$ setzt. Alsdann ergiebt sich

$$\{\varepsilon(x)\}^2 = m \tag{6}$$

und

$$\varepsilon(x) = \sqrt{m}. \tag{7}$$

---

1) S. Anlage 1, (9).



§ 2.

Es soll gezeigt werden, in welcher Weise ein Näherungswert von m a posteriori ermittelt werden kann. Man nehme zu diesem Zweck an, daſs eine Reihe von Versuchsserien, z. B. σ an Zahl, vorliegen, wobei in jeder Serie die Zahl der Versuche gleich unendlich ist und die mathematische Erwartung der Zahl der Fälle, in denen das Ereignis A eintritt, für jede Versuchsserie ein und dieselbe Gröſse und zwar die Unbekannte z ist. Man nehme ferner an, daſs von σ Versuchsserien

in l_0 das Ereignis A 0 mal vorgekommen ist,
" l_1 " " " 1 " " "
" l_2 " " " 2 " " "
" l_3 " " " 3 " " "

u. s. w. Davon ausgehend, daſs die gesuchte mathematische Erwartung gleich z ist, würde man für die Wahrscheinlichkeit des soeben beschriebenen zusammengesetzten Ereignisses den Ausdruck

$$(1)\qquad \frac{(e^{-z})^{l_0}(ze^{-z})^{l_1}(z^2e^{-z})^{l_2}(z^3e^{-z})^{l_3}\ldots}{(1)^{l_1}(1\cdot 2)^{l_2}(1\cdot 2\cdot 3)^{l_3}\ldots}$$

erhalten. Geht man umgekehrt davon aus, daſs das erwähnte zusammengesetzte Ereignis thatsächlich eingetreten ist, so gewinnt man als Wahrscheinlichkeit $\Omega(z)dz$ für die gesuchte mathematische Erwartung, in den Grenzen z und $z+dz$ enthalten zu sein, einen Ausdruck, welcher dem Zähler in (1) proportional sein muſs, (in der Voraussetzung, daſs, ehe die Versuche begonnen wurden, alle Werte von z gleich wahrscheinlich waren) und es ist

$$\Omega(z)dz = Ce^{-z(l_0+l_1+l_2+\cdots)}z^{l_1+2l_2+3l_3+\cdots}dz,$$

worin C eine vorläufig nicht näher angebbare konstante Gröſse bedeutet. Man sieht sofort ein, daſs

$$l_1+2l_2+3l_3+\cdots = s$$

nichts anderes darstellt als die Zahl der Versuche, bei denen in der Gesamtheit aller σ Versuchsserien das Ereignis A eingetreten ist. Der wahrscheinlichste Wert von z wird sich aus der Bedingungsgleichung

$$\Omega(z) = Ce^{-\sigma z}z^s = \text{maximum}$$

oder

$$\frac{d\Omega(z)}{dz} = C(-\sigma e^{-\sigma z}z^s + e^{-\sigma z}sz^{s-1}) = 0$$

bestimmen. Man findet

$$-\sigma z + s = 0$$

und schlieſslich

$$z = \frac{s}{\sigma}.$$



Demnach empfiehlt es sich, um einen angenäherten Wert von m zu finden, die Gesamtzahl der Fälle, bei denen das Ereignis A eingetreten ist, durch die Zahl der Versuchsserien zu dividieren. In Folgendem werden wir den Quotienten $\frac{s}{\sigma}$ mit m' bezeichnen.

Zur Bestimmung von C dient die Gleichung

$$\int_0^\infty \Omega(z)dz = \int_0^\infty Ce^{-\sigma z}z^s dz = 1.$$

Man setze

$$\sigma z = y.$$

Dann ist

$$\int_0^\infty e^{-\sigma z} z^s dz = \frac{1}{\sigma^{s+1}} \int_0^\infty e^{-y} y^s dy = \frac{\Gamma(s+1)}{\sigma^{s+1}}$$

und man erhält

$$C = \frac{\sigma^{s+1}}{\Gamma(s+1)}.$$

Ferner ist

$$\Omega(z) = \frac{\sigma^{s+1}}{\Gamma(s+1)} e^{-\sigma z} z^s = \frac{e^{-\sigma z}(\sigma z)^s \sigma}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s},$$

(2) $$\Omega(m') = \frac{e^{-s} s^s \sigma}{1 \cdot 2 \cdots s}$$

und

(3) $$\Omega(z) = \Omega(m') \left\{ e^{-(z-m')} \left(\frac{z}{m'} \right)^{m'} \right\}^\sigma.$$

Es wird weiter unten Gelegenheit sich darbieten, auf letztere Formeln zurückzukommen.

§ 3.

Den mittleren arithmetischen und den mittleren quadratischen Fehler des Mittelwertes $m' = \frac{s}{\sigma}$ erhält man, indem man alle σ Versuchsserien gedanklich zu einer Serie verbindet und demgemäfs die Zahl s als Einzelergebnis behandelt. Alsdann ergiebt sich, entsprechend der Formel (5) in § 1, als mittlerer arithmetischer Fehler von s der Ausdruck

$$\frac{2e^{-\sigma m}(\sigma m)^{M+1}}{1 \cdot 2 \cdots M},$$

wobei sich M aus den Ungleichungen bezw. Gleichungen

$$\sigma m - 1 \leqq M \leqq \sigma m$$

bestimmt. Der mittlere arithmetische Fehler von m', den wir mit α_0

bezeichnen wollen, ist offenbar gleich obigem Ausdruck, dividiert durch σ:

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sigma} \frac{2e^{-\sigma m}(\sigma m)^{M+1}}{1 \cdot 2 \cdots M}. \tag{1}$$

In ganz analoger Weise ergiebt sich auf Grund der Formel (7) des § 1 als Wert des mittleren quadratischen Fehlers des Mittelwertes m' der Ausdruck

$$\varepsilon(m') = \frac{1}{\sigma}\sqrt{m\sigma} = \sqrt{\frac{m}{\sigma}}. \tag{2}$$

Letztere Formel besagt, dafs der mittlere quadratische Fehler eines Mittelwertes, welcher aus mehreren Versuchsserien gewonnen ist, der Quadratwurzel aus der Zahl dieser umgekehrt proportional ist und sich daher mit wachsender Zahl der Versuchsserien der Grenze 0 nähert.

§ 4.

Im Vorhergehenden ist gezeigt worden, in welcher Weise und mit welchem Grad der Genauigkeit der numerische Wert der mathematischen Erwartung von x gefunden werden kann. Es gilt nunmehr eine analoge Betrachtung hinsichtlich des mittleren quadratischen Fehlers von x anzustellen.

Es giebt zwei verschiedene Methoden, einen angenäherten Wert der gesagten Gröfse zu bestimmen, deren exakter Wert, wie ihn die Formel (7) des § 1 liefert, wegen der Unkenntnis von m, nicht berechnet werden kann.

Die erste oder die indirekte Methode besteht darin, in der erwähnten Formel die Unbekannte m durch ihren wahrscheinlichsten Wert, also durch m', zu ersetzen, und man erhält

$$\varepsilon'(x) = \sqrt{m'}. \tag{1}$$

Die zweite oder die direkte Methode geht von der Begriffsbestimmung der Gröfse

$$\varepsilon(x) = \sqrt{(0-m)^2 w_0 + (1-m)^2 w_1 + (2-m)^2 w_2 + \cdots}$$

unmittelbar aus. Die unbekannten Wahrscheinlichkeiten $w_0, w_1, w_2 \ldots$ ersetzt man durch ihre aus der Erfahrung gefundenen wahrscheinlichsten Werte $w_0', w_1', w_2' \ldots$, welche sich in der Bezeichnungsweise des § 2 so darstellen:

$$w_0' = \frac{l_0}{\sigma}, \quad w_1' = \frac{l_1}{\sigma}, \quad w_2' = \frac{l_2}{\sigma} \cdots.$$

Als Ausdruck des nach der direkten Methode berechneten mittleren quadratischen Fehlers von x erhält man also

$$\varepsilon''(x) = \sqrt{\frac{1}{\sigma}\left\{(0-m)^2 l_0 + (1-m)^2 l_1 + \cdots\right\}}$$

oder auch

$$(2) \qquad \varepsilon''(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=\sigma} \frac{(x_i - m)^2}{\sigma}},$$

worin unter

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots \quad x_\sigma$$

die bei den einzelnen Versuchsserien effektiv erhaltenen Zahlen zu verstehen sind. Die Formel (2) läfst sich jedoch bei unbekanntem m nicht ohne weiteres anwenden und man pflegt $\sum \frac{(x_i - m)^2}{\sigma}$ durch $\sum \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1}$ zu ersetzen, welche zwei Gröfsen erwartungsmäfsig einander gleich sind. Es läfst sich in der That leicht zeigen, dafs die mathematische Erwartung von $\sum \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1}$, wie die von $\sum \frac{(x_i - m)^2}{\sigma}$, gleich m ist. Denn man hat

$$\sum \frac{(x_i - m)^2}{\sigma} - \sum \frac{(x_i - m')^2}{\sigma} = (m' - m)^2.$$

Daher

$$\sum \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1} = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left\{\sum \frac{(x_i - m)^2}{\sigma} - (m' - m)^2\right\}$$

und, wenn man zu den mathematischen Erwartungen übergeht,

$$E\left[\sum \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1}\right] = \frac{\sigma}{\sigma - 1}\left(m - \frac{m}{\sigma}\right) = m.$$

In der Praxis wird man also die direkte Methode in der Gestalt

$$(3) \qquad \varepsilon''(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=\sigma} \frac{(x_i - m')^2}{\sigma - 1}}$$

anwenden müssen.

Es fragt sich nun, welche von den beiden Methoden, die indirekte oder die direkte, genauere Resultate, d. h. solche Werte liefert, die von $\varepsilon(x)$ erwartungsmäfsig weniger abweichen. Um diese Frage zu beantworten, sind folgende zwei Gröfsen zu ermitteln und miteinander zu vergleichen: 1) der mittlere quadratische Fehler von $\varepsilon'(x)$, welcher mit $\varepsilon[\varepsilon'(x)]$ bezeichnet werden kann und 2) der mittlere quadratische Fehler von $\varepsilon''(x)$, welcher mit $\varepsilon[\varepsilon''(x)]$ bezeichnet werden kann.

Wir werden erst die mittleren quadratischen Fehler der Quadrate der Gröfsen $\varepsilon'(x)$ und $\varepsilon''(x)$, mithin

$$\varepsilon[\{\varepsilon'(x)\}^2] \quad \text{und} \quad \varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2]$$

bestimmen.

Laut Formel (1) dieses Paragraphen und Formel (2) des § 3 hat man:

$$\varepsilon[\{\varepsilon'(x)\}^2] = \sqrt{\frac{m}{\sigma}}. \tag{4}$$

Behufs Bestimmung von $\varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2]$ fassen wir Formel (2) dieses Paragraphen ins Auge. Als Ausdruck des mittleren quadratischen Fehlers des Fehlerquadrats von x ergiebt sich

$$\varepsilon[(x-m)^2] = \sqrt{\{(0-m)^2 - m\}^2 w_0 + \{(1-m)^2 - m\}^2 w_1 + \cdots}$$

$$= \sqrt{(0-m)^4 w_0 + (1-m)^4 w_1 + \cdots - m^2}.$$

Setzt man nun in Formel (12) der Anlage 1 $q = 1$ bezw. $p = 0$, so erhält man:

$$(0-m)^4 w_0 + (1-m)^4 w_1 + \cdots = 3m^2 + m.$$

Daher

$$\varepsilon[(x-m)^2] = \sqrt{2m^2 + m}.$$

Man erhält ferner (auf Grund des Satzes von dem mittleren quadratischen Fehler einer Summe mehrerer von einander unabhängiger Gröfsen)

$$\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{i=\sigma}(x_i - m)^2\right] = \sqrt{\sigma(2m^2 + m)}$$

und endlich

$$\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{(x_i - m)^2}{\sigma}\right] = \sqrt{\frac{2m^2 + m}{\sigma}}. \tag{5}$$

Da nun die linke Seite letzterer Gleichung gleich $\varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2]$ ist, so gewinnt man durch Teilung von (5) durch (4):

$$\frac{\varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2]}{\varepsilon[\{\varepsilon'(x)\}^2]} = \sqrt{2m + 1}. \tag{6}$$

Es geht aus (6) hervor, dafs die direkte Methode zur Bestimmung des mittleren quadratischen Fehlers von x stets einen gröfseren mittleren quadratischen Fehler des Quadrats der zu bestimmenden Gröfse liefert als die indirekte Methode. Vom Standpunkte der Genauigkeit aus gesehen, verdient somit die letztere Methode vor der ersteren den Vorzug. Hierbei verliert die direkte Methode um so mehr an relativer Zuverlässigkeit, je gröfser m wird.

Es ist nicht aufser Acht zu lassen, dafs bei obiger Untersuchung angenommen wurde, die Berechnung von $\varepsilon''(x)$ erfolge nach der Formel (2). In der Praxis aber wird die Formel (3), welche der ersteren an Genauigkeit, wenn auch unbedeutend, nachsteht, zur Anwendung kommen müssen. Insofern läfst Formel (6) den Vorteil,

welchen die indirekte Methode vor der direkten hat, eher zu klein als zu grofs erscheinen.

Zum Schlufs sei noch gezeigt, in welcher Weise die mittleren quadratischen Fehler der Gröfsen $\varepsilon'(x)$ und $\varepsilon''(x)$ an der Hand der gefundenen mittleren quadratischen Fehler ihrer Quadrate näherungsweise bestimmt werden können.

Ist ε der mittlere quadratische Fehler einer Gröfse X, deren mathematische Erwartung X_0 ist, so ist es erlaubt, den mittleren quadratischen Fehler einer anderen Gröfse $f(X)$, welche von der ersteren abhängt, durch das Produkt

$$\left\{\frac{df(X)}{dX}\right\}_{X=X_0} \cdot \varepsilon$$

auszudrücken. Wendet man die angedeutete Methode auf den gegenwärtigen Fall an, so erhält man aus (4) und (5)

$$\varepsilon[\varepsilon'(x)] = \frac{1}{2\sqrt{m}}\sqrt{\frac{m}{\sigma}} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma}} \tag{7}$$

und

$$\varepsilon[\varepsilon''(x)] = \frac{1}{2\sqrt{m}}\sqrt{\frac{2m^2+m}{\sigma}} = \frac{\sqrt{2m+1}}{2\sqrt{\sigma}}. \tag{8}$$

Es ist stets im Auge zu behalten, dafs die zwei letzteren Formeln Näherungsformeln sind. Man soll sie in der Praxis lieber vermeiden und sich, wo es thunlich erscheint, der Formeln (4) und (5) bedienen.

Ganz allgemein sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dafs in Formeln (4), (5), (6) und (8) dieses Paragraphen und in Formeln (1) und (2) des § 3, sofern jene Formeln für den praktischen Gebrauch bestimmt sind, die darin vorkommende Gröfse m durch ihren aus der Erfahrung entnommenen wahrscheinlichsten Wert m' zu ersetzen sein wird.

§ 5.

Betrachten wir folgenden in der Praxis oft vorkommenden Fall.

Es liegen, anstatt einer, mehrere, z. B. ν Reihen von Versuchsserien vor, wobei eine jede Reihe zur Bestimmung einer verschiedenen Gröfse dient. Die zu bestimmenden Gröfsen, welche charakterisiert sind als mathematische Erwartungen der Zahl der Versuche, bei denen im Laufe je einer Versuchsserie das in Frage stehende Ereignis eintritt, seien $m_1, m_2, m_3, \ldots m_\nu$. Jede einzelne Reihe besteht auch hier aus σ Versuchsserien, wobei die Zahl der Versuche in jeder Serie gleich unendlich ist. Bezeichnet man mit $x_{i,j}$ das Ergebnis der i^{ten} Versuchsserie in der j^{ten} Reihe, so werden die vorliegenden Daten die Gestalt folgender Tabelle annehmen:

$$\begin{array}{lllll}
x_{1,1}, & x_{2,1}, & x_{3,1}, & \ldots & x_{\sigma,1} \\
x_{1,2}, & x_{2,2}, & x_{3,2}, & \ldots & x_{\sigma,2} \\
x_{1,3}, & x_{2,3}, & x_{3,3}, & \ldots & x_{\sigma,3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x_{1,\nu-1}, & x_{2,\nu-1}, & x_{3,\nu-1}, & \ldots & x_{\sigma,\nu-1} \\
x_{1,\nu}, & x_{2,\nu}, & x_{3,\nu}, & \ldots & x_{\sigma,\nu}
\end{array}$$

Man führe noch die Bezeichnungen

$$x_{1,j} + x_{2,j} + x_{3,j} + \ \ldots \ + x_{\sigma,j} = s_j$$

und

$$\frac{s_j}{\sigma} = m_j'$$

ein.

Ich bemerke ausdrücklich, daſs die Gröſsen $m_1, m_2, \ldots m_\nu$ durch keinerlei Bedingung mit einander verknüpft sind.

Man verabrede sich, als das quadratische Mittel der Gröſsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ die positiv genommene Quadratwurzel aus der durch die Zahl jener Gröſsen dividierten Summe ihrer Quadrate, mithin den Ausdruck

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2}{n}}$$

zu bezeichnen.

Es gilt nun, das quadratische Mittel der mittleren quadratischen Fehler von $x_{i,j}$, welche der ersten, zweiten, dritten u. s. w. Zeile obiger Tabelle entsprechen, zu bestimmen.

Man bezeichne die letzteren mit

$$\varepsilon_1(x), \ \varepsilon_2(x), \ \ldots \ \varepsilon_\nu(x)$$

und das gesuchte quadratische Mittel mit

$$\varepsilon_0(x).$$

Alsdann erhält man auf Grund von (7) in § 1

$$\varepsilon_j(x) = \sqrt{m_j}$$

und ferner

$$\varepsilon_0(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=\nu} \frac{m_j}{\nu}}.$$

Dies ist der exakte Wert der zu bestimmenden Gröſse. Demselben entsprechen zwei angenäherte Werte, nämlich $\varepsilon_0'(x)$ und $\varepsilon_0''(x)$, von denen der erste nach der indirekten, der zweite nach der direkten Methode berechnet ist (siehe (1), (2) und (3) in § 4). Es ist

$$(1) \qquad \varepsilon_0'(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{j=\nu} \frac{m_j'}{\nu}} = \sqrt{\frac{\Sigma s}{\nu\sigma}}$$

und

$$(2) \qquad \varepsilon_0''(x) = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{j=\nu} \sum_{i=1}^{i=\sigma} \frac{(x_{i,j} - m_j)^2}{\sigma}}$$

oder auch

$$\varepsilon_0''(x) = \sqrt{\frac{1}{\nu} \sum_{j=1}^{j=\nu} \sum_{i=1}^{i=\sigma} \frac{(x_{i,j} - m_j')^2}{\sigma - 1}}.$$

Letztere Formel verwandelt sich in

$$(3) \qquad \varepsilon_0''(x) = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{1}{\sigma} \sum s^2}{\nu(\sigma - 1)}},$$

worin sich das erste Summationszeichen auf alle Elemente $x_{i,j}$ und das zweite auf alle Elemente s_j erstreckt.

Als Ausdrücke der mittleren quadratischen Fehler der Gröfsen $\{\varepsilon_0'(x)\}^2$ und $\{\varepsilon_0''(x)\}^2$ [nach (2) berechnet] erhält man

$$(4) \qquad \varepsilon[\{\varepsilon_0'(x)\}^2] = \frac{1}{\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^{j=\nu} \frac{m_j}{\sigma}}$$

und

$$(5) \qquad \varepsilon[\{\varepsilon_0''(x)\}^2] = \frac{1}{\nu} \sqrt{\sum_{j=1}^{j=\nu} \frac{m_j(2m_j + 1)}{\sigma}}$$

(siehe Formeln (4) und (5) in § 4).

Den Formeln (7) und (8) des § 4 entsprechen hier die folgenden:

$$(6) \qquad \varepsilon[\varepsilon_0'(x)] = \frac{1}{2\sqrt{\nu\sigma}},$$

$$(7) \qquad \varepsilon[\varepsilon_0''(x)] = \frac{\sqrt{\frac{2\Sigma m_j^2}{\Sigma m_j} + 1}}{2\sqrt{\nu\sigma}}.$$

In der Praxis, wo die Gröfsen m_j nicht gegeben sind, wird man die Formeln (4), (5) und (7) nicht unmittelbar anwenden können, sondern wird man jene Unbekannten durch die Werte $m_j' = \frac{s_j}{\sigma}$ ersetzen müssen. Auf diese Weise erhält man an Stelle der Ausdrücke $\varepsilon[\;]$ die ihnen entsprechenden $\varepsilon'[\;]$, welche sich wie folgt schreiben werden:

$$(8) \qquad \varepsilon'[\{\varepsilon_0'(x)\}^2] = \frac{1}{\nu\sigma} \sqrt{\Sigma s},$$

$$(9)\qquad \varepsilon'[\{\varepsilon_0''(x)\}^2] = \frac{1}{\nu\sigma}\sqrt{\frac{2}{\sigma}\Sigma s^2 + \Sigma s}$$

und

$$(10)\qquad \varepsilon'[\varepsilon_0''(x)] = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\frac{2}{\sigma}\Sigma s^2 + \Sigma s}{\nu\sigma\,\Sigma s}}.$$

§ 6.

Es soll in diesem Paragraph an einigen numerischen Beispielen gezeigt werden, dafs Formel (2) des § 1 auch für die Fälle, wo n, ohne gleich unendlich zu sein, eine hinreichend grofse Zahl und wo p, ohne eine unendlich kleine Gröfse zu sein, ein hinreichend kleiner Bruch ist, sich als brauchbar erweist, indem jene Formel bei entsprechend gewählten n und p gute Annäherungen liefert.

In nachfolgenden Tabellen enthält die jeweilige Spalte 1 die Werte von x (im Sinne des § 1 ff.), die Spalten 2, 3 und 4 enthalten die Werte des Ausdrucks (1) des § 1 für das nebenstehende x bei den entsprechenden jedesmal im Kopf der Spalte angegebenen Werten von n und p. Die Werte der Spalte 5 sind nach Formel (2) des § 1 berechnet. Jedem Beispiel liegt ein verschiedener Wert des Produktes $np = m$ zu Grunde.

1. Beispiel: $m = 0{,}5$.

x	($n = 1000$, $p = 0{,}0005$.)	($n = 10\,000$, $p = 0{,}00\,005$.)	($n = 100\,000$, $p = 0{,}000\,005$.)	(lim. $n = \infty$, lim. $p = 0$.)
1	2	3	4	5
0	·60 645	·60 653	·60 653	·60 653
1	·30 338	·30 328	·30 327	·30 327
2	·07 581	·07 582	·07 582	·07 582
3	·01 262	·01 263	·01 264	·01 264
4	·00 157	·00 158	·00 158	·00 158
5	·00 016	·00 016	·00 016	·00 016
6	·00 001	·00 001	·00 001	·00 001

2. Beispiel: $m = 2$.

x	($n = 1000$, $p = 0{,}002$.)	($n = 10\,000$, $p = 0{,}0002$.)	($n = 100\,000$, $p = 0{,}00\,002$.)	(lim. $n = \infty$, lim. $p = 0$.)
1	2	3	4	5
0	13 506	·13 531	·13 533	·13 533
1	27 067	·27 067	·27 067	·27 067
2	27 095	·27 070	·27 068	·27 067
3	18 063	·18 046	·18 045	·18 044
4	09 023	·09 022	·09 022	·09 022
5	03 602	·03 608	·03 609	·03 609
6	01 197	·01 202	·01 203	·01 203
7	00 341	·00 343	·00 344	·00 344
8	00 085	·00 086	·00 086	·00 086
9	00 019	·00 019	·00 019	·00 019
10	00 004	·00 004	·00 004	·00 004
11	00 001	·00 001	·00 001	·00 001



3. Beispiel: $m = 5$.

x	($n = 1000$, $p = 0{,}005$)	($n = 10\,000$, $p = 0{,}0005$.)	($n = 100\,000$ $p = 0{,}00\,005$.)	(lim. $n = \infty$, lim. $p = 0$.)
1	2	3	4	5
0	·00 665	·00 673	·00 674	·00 674
1	·03 344	·03 366	·03 369	·03 369
2	·08 393	·08 419	·08 422	·08 422
3	·14 030	·14 036	·14 037	·14 037
4	·17 573	·17 549	·17 547	·17 547
5	·17 591	·17 551	·17 547	·17 547
6	·14 659	·14 626	·14 623	·14 622
7	·10 460	·10 446	·10 445	·10 445
8	·06 525	·06 526	·06 528	·06 528
9	·03 614	·03 625	·03 627	·03 627
10	·01 800	·01 812	·01 813	·01 813
11	·00 814	·00 823	·00 824	·00 824
12	·00 337	·00 343	·00 343	·00 343
13	·00 129	·00 132	·00 132	·00 132
14	·00 046	·00 047	·00 047	·00 047
15	·00 015	·00 016	·00 016	·00 016
16	·00 005	·00 005	·00 005	·00 005
17	·00 001	·00 001	·00 001	·00 001

4. Beispiel: $m = 10$.

x	($n = 1000$, $p = 0{,}01$)	($n = 10\,000$, $p = 0{,}001$.)	($n = 100\,000$, $p = 0{,}0001$.)	(lim. $n = \infty$, lim. $p = 0$.)
1	2	3	4	5
0	·00 004	·00 005	·00 005	·00 005
1	·00 044	·00 045	·00 045	·00 045
2	·00 220	·00 226	·00 227	·00 227
3	·00 739	·00 755	·00 757	·00 757
4	·01 861	·01 889	·01 891	·01 892
5	·03 745	·03 780	·03 783	·03 783
6	·06 274	·06 302	·06 305	·06 306
7	·08 999	·09 007	·09 008	·09 008
8	·11 283	·11 262	·11 261	·11 260
9	·12 561	·12 516	·12 512	·12 511
10	·12 574	·12 518	·12 512	·12 511
11	·11 431	·11 380	·11 375	·11 374
12	·09 517	·09 482	·09 479	·09 478
13	·07 306	·07 293	·07 292	·07 291
14	·05 203	·05 207	·05 208	·05 208
15	·03 454	·03 467	·03 472	·03 472
16	·02 148	·02 168	·02 170	·02 170
17	·01 256	·01 274	·01 276	·01 276
18	·00 693	·00 708	·00 709	·00 709
19	·00 362	·00 372	·00 373	·00 373
20	·00 179	·00 186	·00 187	·00 187
21	·00 084	·00 088	·00 089	·00 089
22	·00 038	·00 040	·00 040	·00 040
23	·00 016	·00 017	·00 018	·00 018
24	·00 007	·00 007	·00 007	·00 007
25	·00 003	·00 003	·00 003	·00 003
26	·00 001	·00 001	·00 001	·00 001

§ 7.

Auf dem Gebiete der angewandten Wahrscheinlichkeitsrechnung pflegt man den Gebrauch der Formel (1) des § 1, da er mit sehr umständlichen Rechnungen verbunden ist, zu vermeiden. Man bedient sich vielmehr mit Vorliebe der Formel

$$(1) \qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{u'}^{u''} e^{-h^2 u^2} du,$$

welche die Wahrscheinlichkeit für x, in den Grenzen $np + u'$ und $np + u''$ enthalten zu sein, angiebt. Die Konstante h, Präcision genannt, bestimmt sich aus der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{1}{2h^2} = npq.$$

Setzt man in (1) $u' = -\frac{\alpha}{h}$, $u'' = \frac{\alpha}{h}$ und $hu = t$, so findet man als Wahrscheinlichkeit dafür, dafs x nicht kleiner als $np - \frac{\alpha}{h}$ und nicht gröfser als $np + \frac{\alpha}{h}$ sei, den wohlbekannten Ausdruck

$$(3) \qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2} dt.$$

Die Formeln (1) und (3) sind Näherungsformeln: nur unter bestimmten Bedingungen liefern dieselben Resultate, welche sich von denjenigen nicht merklich unterscheiden, die man auf Grund der strengen Formel (1) des § 1 erhalten würde. Die in Frage stehenden Bedingungen pflegt man so zu formulieren: 1. mufs n eine grofse Zahl sein, etwa gleich einigen Tausend; 2. darf p bezw. q nicht zu klein sein. In letzterer Hinsicht vermifst man gewöhnlich numerisch präcisierte Angaben.

Es ist nun ein Leichtes zu zeigen, dafs es sich hierbei, im Grunde genommen, nicht um zwei getrennte Bedingungen handelt, sondern um eine, welche darin besteht, dafs das Produkt npq eine bestimmte Höhe erreicht. Denn selbst in dem Falle, wo p (oder q) eine unendlich kleine Gröfse ist, wenn nur das Produkt npq bezw. die Zahl m entsprechend grofs ist, werden die Formeln (1) und (3) anstatt der (in diesem Falle als exakt anzusehenden) Formel (2) des § 1 sehr wohl zu gebrauchen sein. Dies darzuthun, ist die Aufgabe der nachstehenden Zeilen.

Ist die Zahl x hinreichend grofs, um die Anwendung der Stirlingschen Formel auf das Produkt $1 \cdot 2 \ldots x$ im Nenner von (2) in § 1 zu gestatten, so ergiebt sich

$$w_x = \left(\frac{m}{x}\right)^x \frac{e^{x-m}}{\sqrt{2\pi x}}$$

oder auch

$$w_x = \frac{e^{x-m}}{\sqrt{2\pi m}} \left(\frac{x}{m}\right)^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)},$$

woraus, mit Benutzung der Bezeichnungen

$$x = m + u, \quad \frac{u}{m} = \delta$$

und der Zerlegung

$$\log_e (1 + \delta) = \frac{\delta}{1} - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^4}{4} + \dots,$$

leicht abzuleiten ist

$$(4) \qquad w_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\left(\frac{u}{1\cdot 2} + \frac{1}{2}\right)\delta + \left(\frac{u}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 2}\right)\delta^2 - \left(\frac{u}{3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3}\right)\delta^3 + \cdots}.$$

Ist δ ein so kleiner Bruch, dafs die Glieder des Exponenten, welche δ^2, δ^3 u. s. w. enthalten, füglich vernachlässigt werden können — und bei hinreichend grofsem m kommen praktisch nur diejenigen Werte w_x in Betracht, welche dieser Bedingung genügen —, so verwandelt sich (4) in

$$(5) \qquad w_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{u(u+1)}{2m}}.$$

Wenn aber zugleich u eine ziemlich grofse Zahl ist, so werden sich die nach (5) berechneten Werte von w_x von denjenigen nicht erheblich unterscheiden, welche die Formel

$$(6) \qquad w_x = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{u^2}{2m}}$$

liefern würde. Die Beziehung von (6) zu (1) liegt auf der Hand. Weil im gegebenen Fall $\frac{1}{2h^2} = m$, müssen beide Formeln zu fast vollständig übereinstimmenden Resultaten führen.

Wollte man die Richtigkeit letzterer Behauptung an numerischen Beispielen nachprüfen, so wäre dem Umstand in angemessener Weise Rechnung zu tragen, dafs der Formel (1) die Annahme von einer stetigen Veränderung der Gröfse u zu Grunde liegt, während bei der Ableitung von (6) von der Thatsache nicht abgewichen worden ist, dafs u nur solche Werte annimmt, welche für $m + u$ ganze Zahlen ergeben.

§ 8.

Ein Gegenstück zu dem Lehrsatz, welcher besagt, dafs bei einer gegebenen Wahrscheinlichkeit p die Wahrscheinlichkeit für x, in bestimmten Grenzen enthalten zu sein, durch die Formel (1) des § 7 ausgedrückt wird, bildet der folgende: Ist bei n Versuchen das Ereignis A m' Male vorgekommen (und $n-m'$ Male ausgeblieben), so besteht eine Wahrscheinlichkeit gleich

$$(1)\qquad \frac{\varkappa}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{v'}^{v''} e^{-\varkappa^2 v^2}\,dv$$

dafür, dafs die Unbekannte np in den Grenzen $m' + v'$ und $m' + v''$ enthalten sei, wobei

$$(2)\qquad \frac{1}{2\varkappa^2} = n\,\frac{m'}{n}\left(1 - \frac{m'}{n}\right).$$

Liegen indessen anstatt einer aus n Versuchen bestehenden Serie σ solche Versuchsserien vor und ist das Ereignis A im Ganzen s mal vorgekommen, so wird sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs σnp zwischen den Grenzen $s + v'\sigma$ und $s + v''\sigma$ liege, offenbar durch

$$(3)\qquad \frac{\varkappa_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{v'\sigma}^{v''\sigma} e^{-\varkappa_0^2 (v\sigma)^2}\,d(v\sigma)$$

darstellen lassen, wobei

$$\frac{1}{2\varkappa_0^2} = \sigma n\,\frac{s}{\sigma n}\left(1 - \frac{s}{\sigma n}\right).$$

Bezeichnet man $\varkappa_0\sigma$ mit K, so verwandelt sich (3) in

$$(4)\qquad \frac{K}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{v'}^{v''} e^{-K^2 v^2}\,dv\,.$$

Dies ist zugleich die Wahrscheinlichkeit für np, in den Grenzen $\frac{s}{\sigma} + v'$ und $\frac{s}{\sigma} + v''$ enthalten zu sein. Man findet noch

$$(5)\qquad \frac{1}{2K^2} = \frac{s}{\sigma^2}\left(1 - \frac{s}{\sigma n}\right).$$

Es wird nun gemeinhin gelehrt, obige Formeln seien nur dann anwendbar, wenn 1. n eine grofse Zahl ist und 2. weder p noch q sehr klein sind. Thatsächlich wird man aber auf Formel (4) selbst in dem Fall eines unendlich kleinen p geführt, wenn nur m bezw. $\frac{s}{\sigma}$ entsprechend grofs ist.

Hält man an der Bezeichnungsweise des § 2 fest und setzt

$$z = m' + v, \quad \frac{v}{m'} = \varepsilon,$$

so findet man aus Formeln (2) und (3) des § 2, mit Anwendung der Stirlingschen Formel auf das Produkt $1 \cdot 2 \cdots s$ und mit Benützung der Zerlegung

$$\log_e(1 + \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{1} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \cdots,$$

$$(6)\qquad \Omega(z) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi m'}}\; e^{-\frac{v\sigma}{2}\varepsilon + \frac{v\sigma}{3}\varepsilon^2 - \frac{v\sigma}{4}\varepsilon^3 + \cdots}$$

und näherungsweise

$$\Omega(z) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi m'}}\, e^{-\frac{\sigma v^2}{2m'}}. \tag{7}$$

Letzteres Resultat entspricht aber ganz genau der Formel (4), weil bei $n = \infty$ der Ausdruck $\frac{1}{2K^2}$ gleich $\frac{\varepsilon}{\sigma^2} = \frac{m'}{\sigma}$ wird.

Nach den Ausführungen dieses und des vorhergehenden Paragraphen kommt der Grundformel (2) des § 1 und den auf ihr fufsenden Formeln (wie z. B. (2) und (3) in § 2) eine selbständige Bedeutung nur für den Fall zu, wo m bezw. m' eine kleine Zahl ist. Im übrigen wird man auch bei sehr kleinen, ja, theoretisch gesprochen, bei unendlich kleinen Werten von p bezw. q sich der üblichen Näherungsformeln getrost bedienen können.

Zweites Kapitel.

§ 9.

Es soll nunmehr der Versuch gemacht werden, die Formeln des ersten Kapitels auf statistische Reihen absoluter Zahlen anzuwenden, welche für eine Reihe von Kalenderjahren angeben, wieviel Male im Laufe eines jeden Jahres ein bestimmtes Ereignis in einer gegebenen Gesellschaft von Menschen vorgekommen ist. Hierbei werden solche Beispiele gewählt, bei denen die Bedingung erfüllt ist, daſs den einzelnen Gliedern der ins Auge gefaſsten statistischen Reihe jeweils sehr groſse Zahlen von Beobachtungen bezw. von beobachteten Menschen entsprechen (mindestens einige Tausend), während die Zahlen selbst, aus denen sich die statistische Reihe zusammensetzt, kleine Zahlen sind (nicht über 20 hinausgehend).

1. Beispiel: Die Selbstmorde von Kindern in Preuſsen.

Nachstehende Tabelle (siehe folgde. Seite) enthält die Zahlen der von Knaben und Mädchen unter 10 Jahren in Preuſsen im Zeitraume 1869—1893 begangenen Selbstmorde.[1])

a) Betrachten wir zuerst die Spalte 2 der Tabelle, so zeigt es sich, daſs die Zahlen der Selbstmorde zwischen den Grenzen 0 und 6 schwanken. Diese Schwankungen kommen am besten in folgender Tabelle zum Ausdruck, deren zweite Spalte angiebt, wie viele Jahrgänge aus 25 0, 1, 2, 3 ... Selbstmorde geliefert haben.

x	l_x
0	4
1	8
2	5
3	3
4	4
5	—
6	1

1) Handwörterbuch der Staatswissenschaften, 1. Suppl.-Bd., 1896. Art.: „Selbstmordstatistik" von G. v. Mayr, S. 696.

Jahr	Knaben	Mädchen	Zusammen
1	2	3	4
1869	2	1	3
70	3	—	3
71	1	1	2
72	4	—	4
73	1	1	2
74	4	—	4
75	—	2	2
76	3	1	4
77	—	—	—
78	1	—	1
79	2	—	2
80	6	—	6
81	3	—	3
82	4	—	4
83	1	—	1
84	—	—	—
85	2	—	2
86	2	—	2
87	1	—	1
88	1	1	2
89	—	—	—
90	2	1	3
91	1	1	2
92	1	1	2
93	4	1	5
Im ganzen	49	11	60

Unsere Aufgabe besteht nun darin, zu prüfen, ob die angeführten Ergebnisse der Statistik auf das uns aus dem ersten Kapitel bekannte Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung zurückgeführt werden können. Hierbei hat man sich zu fragen: in wieviel Fällen aus 25 würden sich die Ergebnisse 0, 1, 2 u. s. w. am wahrscheinlichsten einstellen, gesetzt, dafs jenes Schema zuträfe? Die Antwort wird durch die Produkte $25 \cdot w_x$ geliefert, wobei w_x dieselbe Bedeutung hat wie in § 1. Nur hat man in die mafsgebende Formel (2) des § 1 anstatt der Unbekannten m den wahrscheinlichsten Wert ihrer, nämlich den Mittelwert

$$m' = \frac{49}{25} = 1,96$$

einzusetzen. Auf diese Weise läfst sich nachfolgende Zahlenreihe berechnen:

x	$25 \cdot w_x$	x	$25 \cdot w_x$
0	3,4	5	0,9
1	6,8	6	0,3
2	6,8	7	0,1
3	4,5	8	0,0
4	2,2		

Nennt man, nach Lexis' Vorgang, Dispersion die Art, wie sich die Glieder einer statistischen Reihe um den Mittelwert der Reihe verteilen, oder anders das Bild von den Schwankungen, welche eine statistische Reihe darbietet, so kann man sagen, dafs es sich nunmehr darum handelt, die erwartungsmäfsige Dispersion der Elemente x, wie sie sich in der Reihe der Werte $25 \cdot w_x$ darstellt, der effektiven Dispersion der nämlichen Elemente, wie diese in der Reihe der Werte l_x zum Ausdruck kommt, gegenüberzustellen, und zuzusehen, ob beide Dispersionen in dem Mafse übereinstimmen, dafs die Abweichungen der Gröfsen l_x von den entsprechenden Gröfsen $25 w_x$ als zufällige im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung gedeutet werden können.

Der erste Eindruck ist, dafs sich in der effektiven Dispersion die erwartungsmäfsige ziemlich getreu abspiegelt. Dieser Eindruck wird bestätigt durch den Vergleich zwischen den zwei Werten des mittleren quadratischen Fehlers von x, von denen der eine nach der indirekten Methode, d. h. nach Formel (1) des § 4 bezw. in Anlehnung an die Reihe $25 \cdot w_x$, der andere nach der direkten Methode, d. h. nach Formel (3) desselben Paragraphen bezw. in Anlehnung an die Reihe l_x berechnet ist. Man findet:

$$\{\varepsilon'(x)\}^2 = 1{,}96; \qquad \{\varepsilon''(x)\}^2 = 2{,}46;$$
$$\varepsilon'(x) = 1{,}40; \qquad \varepsilon''(x) = 1{,}57.$$

Greift man noch zu den Formeln (4) und (5) des § 4, in welchen m durch m' zu ersetzen ist, so erhält man

$$\varepsilon[\{\varepsilon'(x)\}^2] = 0{,}28; \qquad \varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2] = 0{,}62.$$

Die Differenz zwischen den Ergebnissen der direkten und der indirekten Methode liegt also im Bereich des entsprechenden mittleren Fehlers ($2{,}46 - 1{,}96 = 0{,}50 < 0{,}62$).

b) Ganz ähnliche Berechnungen ergaben für Spalte 3 derselben Tabelle (Mädchen) folgende Resultate:

x	l_x	$25 \cdot w_x$
0	15	16,1
1	9	7,1
2	1	1,6
3	—	0,2

$$\{\varepsilon'(x)\}^2 = 0{,}44; \qquad \{\varepsilon''(x)\}^2 = 0{,}34;$$
$$\varepsilon'(x) = 0{,}66; \qquad \varepsilon''(x) = 0{,}58;$$
$$\varepsilon[\{\varepsilon'(x)\}^2] = 0{,}13; \qquad \varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2] = 0{,}18.$$

c) Schliefslich stellen sich die Ergebnisse für Spalte 4 wie folgt dar:

x	l_x	$25 \cdot w_x$
0	3	2,3
1	3	5,4
2	9	6,5
3	4	5,2
4	4	3,1
5	1	1,5
6	1	0,6
7 u. mehr	—	0,4

$\{\varepsilon'(x)\}^2 = 2{,}40;$ $\{\varepsilon''(x)\}^2 = 2{,}33;$

$\varepsilon'(x) = 1{,}55;$ $\varepsilon''(x) = 1{,}53;$

$\varepsilon[\{\varepsilon'(x)\}^2] = 0{,}31;$ $\varepsilon[\{\varepsilon''(x)\}^2] = 0{,}74.$

Aus den mitgeteilten Rechnungsergebnissen geht hervor, dafs sowohl im Falle b) als im Falle c) die effektive Dispersion mit der erwartungsmäfsigen noch besser übereinstimmt, als es sich im Falle a) gezeigt hat.

Aber in allen drei Fällen macht sich der nachteilige Einflufs des Umstandes geltend, dafs die Zahl der in Frage stehenden Elemente relativ klein ist (gleich 25), wodurch entsprechend grofse Abweichungen von der Norm entstehen. Um dieser Wirkung zu begegnen, werde ich bei den folgenden Beispielen mehrere statistische Reihen nach dem Schema des § 5 zusammenziehen.

§ 10.

2. Beispiel: Die weiblichen Selbstmorde in acht deutschen Staaten.

Nachstehende Tabelle giebt an, wieviel weibliche Selbstmorde in jedem Kalenderjahr von 1881 bis 1894 in folgenden Staaten vorgekommen sind: a) Schaumburg-Lippe, b) Waldeck, c) Lübeck, d) Reufs ä. L., e) Lippe, f) Schwarzburg-Rudolstadt, g) Mecklenburg-Strelitz und h) Schwarzburg-Sondershausen.[1])

Tabelle 1.

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	Im ganzen
a)	0	2	0	2	0	0	3	3	1	3	1	3	1	1	20
b)	2	3	1	2	2	0	4	1	3	1	5	3	1	3	31
c)	3	2	1	4	3	0	3	2	3	4	1	1	4	5	36
d)	5	2	3	3	3	6	4	1	4	2	2	1	1	0	37
e)	4	1	1	6	1	4	5	0	6	4	0	3	3	2	40
f)	5	1	8	6	6	3	5	7	5	7	6	5	3	5	72
g)	1	3	4	4	10	9	4	2	8	9	4	8	6	2	74
h)	2	5	5	2	2	4	10	2	6	9	9	4	9	10	79

1) Allgemeines Statistisches Archiv, 4. Jahrgang, II. Hbd., 1896. Art. „Der Selbstmord" von G. v. Mayr, S. 718.

Die Tabelle 1 wollen wir in eine solche verwandeln, welche unmittelbar angiebt, wieviel Male in jeder Zeile der Tabelle 1 und in sämtlichen Zeilen zusammengenommen das Jahresergebnis 0, 1, 2, u. s. w. vorkommt.

Tabelle 2.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	4	4	2	4							
b)	1	4	3	4	1	1					
c)	1	3	2	4	3	1					
d)	1	3	3	3	2	1	1				
e)	2	3	1	2	3	1	2				
f)		1		2		5	3	2	1		
g)		1	2	1	4		1		2	2	1
h)			4		2	2	1			3	2
Sa.	9	19	17	20	15	11	8	2	3	5	3

Letztere Tabelle bringt die effektive Dispersion der Jahresergebnisse zum Ausdruck. Die entsprechende erwartungsmäfsige Dispersion, berechnet auf Grund der Mittelwerte, die man durch Division der Zahlen der letzten Spalte der Tabelle 1 durch 14 erhält, stellt sich so dar:

Tabelle 3.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11 —
a)	3,36	4,79	3,42	1,63	0,58	0,17	0,04	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
b)	1,53	3,39	3,75	2,77	1,53	0,68	0,25	0,08	0,02	0,01	0,00	0,00
c)	1,07	2,75	3,54	3,03	1,95	1,00	0,43	0,16	0,05	0,01	0,00	0,00
d)	1,00	2,63	3,48	3,07	2,03	1,07	0,47	0,18	0,06	0,02	0,01	0,00
e)	0,80	2,30	3,28	3,13	2,23	1,28	0,61	0,25	0,09	0,03	0,01	0,00
f)	0,08	0,42	1,08	1,85	2,38	2,45	2,10	1,54	0,99	0,57	0,29	0,23
g)	0,07	0,38	0,99	1,75	2,21	2,44	2,15	1,62	1,07	0,63	0,33	0,27
h)	0,05	0,28	0,79	1,49	2,10	2,37	2,22	1,79	1,26	0,79	0,45	0,41
Sa.	7,96	16,94	20,33	18,70	15,11	11,45	8,27	5,63	3,55	2,05	1,09	0,92

Betrachtet man die letzten Zeilen der Tabellen 2 und 3, so zeigt sich, abgesehen von einigen Ausnahmen, welche darin ihren Grund haben mögen, dafs die in Betracht kommenden Elemente sehr wenig zahlreich sind, eine sehr befriedigende Übereinstimmung der statistischen Erfahrung mit den Vorausberechnungen der Theorie.

Zieht man die x Werte[1]) 0 — 2 in eine erste, die x Werte 3 — 4 in eine zweite und die x Werte 5 und mehr in eine dritte Gruppe zusammen, so findet man, dafs auf die erste Gruppe erwartungsmäfsig 45,2, in Wirklichkeit 45 x Werte entfallen, auf die zweite 33,8 bezw. 35 und auf die dritte 33,0 bezw. 32.

Einen summarischen Ausdruck findet im gegenwärtigen Beispiel

1) x ist gleich dem Jahresergebnis für einen bestimmten Staat.



die erwartungsmäfsige Dispersion in der Gröfse $\varepsilon_0'(x)$ [§ 5, Formel (1)] und die effektive Dispersion in der Gröfse $\varepsilon_0''(x)$ [§ 5, Formel (3)].

Ich lasse nun die numerischen Werte zunächst der Quadrate dieser Gröfsen, sodann ihrer selbst folgen. In Klammern füge ich den numerischen Wert des entsprechenden mittleren quadratischen Fehlers bei [berechnet nach den Formeln (8), (9), (6) und (10) des § 5].

$$\{\varepsilon_0'(x)\}^2 = 3{,}47\ (0{,}18); \qquad \{\varepsilon_0''(x)\}^2 = 4{,}60\ (0{,}53);$$
$$\varepsilon_0'(x) = 1{,}86\ (0{,}05); \qquad \varepsilon_0''(x) = 2{,}15\ (0{,}14).$$

§ 11.

3. Beispiel: Die tötlichen Unfälle bei elf Berufsgenossenschaften.

In nachstehender Tabelle sind für einen 9jährigen Zeitraum die Zahlen der Betriebsunfälle mit tötlichem Ausgang, welche sich bei den betreffenden Berufsgenossenschaften jedes Jahr ereignet haben, angeführt. Von den auf Grund des Unfallversicherungsgesetzes vom 6. Juli 1884 errichteten Berufsgenossenschaften habe ich diejenigen gewählt, für welche die Statistik die kleinsten Zahlen solcher Unfälle nachweist. Die Berufsgenossenschaften sind nicht nach ihren Namen, auf die es hier nicht weiter ankommt, sondern nach den Ordnungsnummern bezeichnet, mit denen sie in den statistischen Publikationen[1]) versehen sind.

Nr. der Berufsgenossenschaft	86	87	88	89	90	91	92	93	94
13	6	8	7	5	14	8	9	4	8
14	2	2	2	1	1	3	5	3	4
12	—	1	2	2	5	—	2	7	4
20	3	3	5	3	10	2	5	4	4
23	3	9	6	11	6	8	5	4	4
27	1	2	2	3	1	1	1	4	2
29	4	8	4	3	8	3	7	4	12
40	2	5	1	3	2	—	—	6	7
41	1	3	5	4	6	7	5	8	7
42	5	6	5	5	3	4	—	8	5
55	5	5	2	2	7	5	3	6	4

Behandelt man nun die vorliegenden Daten in der nämlichen Weise wie vorhin die Daten über die weiblichen Selbstmorde, so gelangt man zu folgenden Endresultaten:

---

1) Statistisches Jahrbuch für das Deutsche Reich oder Die amtlichen Nachrichten des Reichsversicherungsamts.



Jahresergebnis	Zahl der Fälle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis vorgekommen ist	zu erwarten war
1	2	3
0	5	3,69
1	9	9,61
2	14	13,89
3	13	15,21
4	14	14,34
5	16	12,31
6	7	9,80
7	7	7,28
8	8	5,06
9	2	3,30
10	1	2,03
11	1	1,19
12	1	0,66
13	—	0,34
14	1	0,17
15	—	0,08
16 u. mehr	—	0,04

Wie man sieht, entspricht Spalte 2 vorstehender Tabelle der letzten Zeile der Tabelle 2 in § 10 und Spalte 3 vorstehender Tabelle der letzten Zeile der Tabelle 3 in § 10.

Auch in diesem Beispiel stimmt die effektive Dispersion mit der erwartungsmäfsigen ziemlich genau überein. Man fasse die Zahlen zu gröfseren Gruppen zusammen. Alsdann erhält man:

Jahresergebnis	Zahl der Fälle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis vorgekommen ist	zu erwarten war
0—2	28	27,2
3—4	27	29,6
5—6	23	22,1
7—	21	20,1

Endlich ergiebt die Rechnung:

$$\{\varepsilon_0'(x)\}^2 = 4{,}36\ (0{,}21); \qquad \{\varepsilon_0''(x)\}^2 = 5{,}48\ (0{,}70);$$
$$\varepsilon_0'(x) = 2{,}09\ (0{,}05); \qquad \varepsilon_0''(x) = 2{,}34\ (0{,}17).$$

§ 12.

4. Beispiel: Die durch Schlag eines Pferdes im preufsischen Heere Getöteten.

In nachstehender Tabelle sind die Zahlen der durch Schlag eines Pferdes verunglückten Militärpersonen, nach Armeecorps („G." bedeutet Gardecorps) und Kalenderjahren nachgewiesen.[1])

1) Siehe die Hefte 38, 46, 50, 55, 60, 63, 67, 80, 84, 87, 91, 95, 99, 108,



	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94
G	—	2	2	1	—	—	1	1	—	3	—	2	1	—	—	1	—	1	—	1
I	—	—	—	2	—	3	—	2	—	—	—	1	1	1	—	2	—	3	1	—
II	—	—	—	2	—	2	—	—	1	1	—	—	2	1	1	—	—	2	—	—
III	—	—	—	1	1	1	2	—	2	—	—	—	1	—	1	2	1	—	—	—
IV	—	1	—	1	1	1	1	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	1	—	—
V	—	—	—	—	2	1	—	—	1	—	—	1	—	1	1	1	1	1	1	—
VI	—	—	1	—	2	—	—	1	2	—	1	1	3	1	1	1	—	3	—	—
VII	1	—	1	—	—	—	1	—	1	1	—	—	2	—	—	2	1	—	2	—
VIII	1	—	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	1	—	—	—	1	1	—	1
IX	—	—	—	—	—	2	1	1	1	—	2	1	1	—	1	2	—	1	—	—
X	—	—	1	1	—	1	—	2	—	2	—	—	—	—	2	1	3	—	1	1
XI	—	—	—	—	2	4	—	1	3	—	1	1	1	1	2	1	3	1	3	1
XIV	1	1	2	1	1	3	—	4	—	1	—	3	2	1	—	2	1	1	—	—
XV	—	1	—	—	—	—	—	1	—	1	1	—	—	—	2	2	—	—	—	—

a) Man kann im gegebenen Fall zunächst einmal genau in derselben Weise verfahren wie in den beiden vorangehenden. Man findet:

Jahresergebnis	Zahl der Fälle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis eingetreten ist	zu erwarten war
0	144	143,1
1	91	92,1
2	32	33,8
3	11	8,9
4	2	2,0
5 u. mehr	—	0,6

$$\{\varepsilon_0'(x)\}^2 = 0{,}70\ (0{,}05); \qquad \{\varepsilon_0''(x)\}^2 = 0{,}73\ (0{,}09);$$

$$\varepsilon_0'(x) = 0{,}84\ (0{,}03); \qquad \varepsilon_0''(x) = 0{,}85\ (0{,}05).$$

b) Sodann kann man aber, unter Weglassung des Gardecorps, des I., VI. und XI. Armeecorps, welche eine von der normalen ziemlich stark abweichende Zusammensetzung aufweisen[1]), die Zahlen, welche sich auf die übrigbleibenden 10 Armeecorps beziehen, so behandeln, als bezögen sie sich alle auf ein und dasselbe Armeecorps, mithin eine einzige aus 200 Elementen bestehende statistische Reihe annehmen und auf dieselbe das Schema des § 4 anwenden. Es ergiebt sich:

114, 118, 124, 132, 135 und 139 der „Preufsischen Statistik (amtliches Quellenwerk)“.

1) Das Gardecorps besteht, von Artillerie, Pionieren und Train abgesehen, aus 134 Infanterie-Kompagnien und 40 Kavallerie-Escadrons, das XI. Armeecorps umfafst 3 Divisionen, das I. Armeecorps hat 30, das VI. 25 Escadrons, während die Norm 20 ist.



Jahresergebnis	Zahl der Fälle, in denen das nebenstehende Jahresergebnis eingetreten ist	zu erwarten war
0	109	108,7
1	65	66,3
2	22	20,2
3	3	4,1
4	1	0,6
5 u. mehr	—	0,1

$\{\varepsilon'(x)\}^2 = 0{,}61\ (0{,}06)$; $\{\varepsilon''(x)\}^2 = 0{,}61\ (0{,}09)$;

$\varepsilon'(x) = 0{,}78\ (0{,}04)$; $\varepsilon''(x) = 0{,}78\ (0{,}06)$.

Die Kongruenz der Theorie mit der Erfahrung läfst sowohl im Fall a) als im Fall b), wie man sieht, nichts zu wünschen übrig.

Drittes Kapitel.

§ 13.

Die im vorhergehenden Kapitel angeführten Ergebnisse des Versuches, gewisse Formeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einige Daten der Statistik anzuwenden, scheinen auf den ersten Blick in Widerspruch zu stehen mit der bekannten Thatsache, dafs die Schwankungen, welche sich bei statistischen Reihen[1]) zeigen, der Regel nach den Erwartungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung gar nicht entsprechen.

Eine genaue Übereinstimmung der effektiven Dispersion mit der erwartungsmäfsigen ist bislang für einen einzigen Fall nachgewiesen worden und zwar von Lexis bei dem Geschlechtsverhältnis der Geborenen. Was hingegen die sonstigen Relativzahlen geschweige denn die absoluten Zahlen betrifft, so weisen dieselben ausnahmslos Schwankungen in der Zeit auf, welche ihrer Gröfse oder Amplitude nach die von der Theorie vorgezeichnete Norm erheblich überschreiten.[2])

Ich fasse ausschliefslich statistische Relativzahlen ins Auge, welche so geartet sind, dafs sie in rein formaler Hinsicht als Näherungswerte von Wahrscheinlichkeitsgröfsen aufgefafst werden können. Solche Relativzahlen stellen sich als Quotienten aus zwei Zahlen dar, von denen die eine — der Divisor — angiebt, wie viele Einzelfälle im ganzen beobachtet worden sind, und die andere — der Dividend — angiebt, in wie vielen Fällen aus der Zahl der beobachteten ein be-

1) Unter einer statistischen Reihe verstehe ich hier wie in folgendem eine Anzahl von Werten einer bestimmten statistischen Gröfse, von denen jeder einzelne einem bestimmten Kalenderjahr oder sonstigen Zeitabschnitt entspricht, wobei alle Zeitabschnitte zusammen genommen einen geschlossenen Zeitraum bilden.

2) Diese Erkenntnis verdankt man W. Lexis, dessen hierher gehörende Schriften die folgenden sind: „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft", 1877; „Einleitung in die Theorie der Bevölkerungsstatistik", 1875 (Schlufskapitel); in den Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik von Hildebrand-Conrad: „Das Geschlechtsverhältnis der Geborenen und die Wahrscheinlichkeitsrechnung" (1876), „Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen" (1879), „Über die Wahrscheinlichkeitsrechnung und deren Anwendung auf die Statistik" (1886). Im Handwörterbuch der Staatswissenschaften von Conrad, Elster, Lexis, Loening, 1890—94 die Art. „Gesetz", „Geschlechtsverhältnis bei Geborenen und Gestorbenen", „Moralstatistik" und „Statistik".



stimmtes Ereignis eingetreten ist. Man wolle Beobachtungszahl für den Divisor und Ereigniszahl für den Dividend sagen.

Man bezeichne ferner mit

$$p_1', p_2' \ldots p_\sigma'$$

eine aus σ Elementen oder Gliedern bestehende statistische Reihe. Die Gröfsen p_i' sind der oben bezeichneten Art, können also, rein formal betrachtet, als Näherungsausdrücke von Wahrscheinlichkeitsgröfsen angesehen werden.

Nimmt man nun an, $p_1', p_2', p_3' \ldots$ seien Ausdrücke einer gemeinschaftlichen Wahrscheinlichkeit, deren exakter Wert p_0 ist, so wird sich der für die zu erwartenden Schwankungen mafsgebende mittlere quadratische Fehler von p_i' als

$$\varepsilon(p_i') = \sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} \tag{1}$$

darstellen, wobei $q_0 = 1 - p_0$ und n die der Einfachheit halber konstant gedachte Beobachtungszahl ist.

Die Gröfse p_0 ist unbekannt und darum kann der erwähnte mittlere Fehler nur näherungsweise berechnet werden. Zwei Methoden sind zu diesem Zwecke anwendbar. Die indirekte, welche darin besteht, in (1) die Unbekannte p_0 durch

$$p_0' = \frac{p_1' + p_2' + \cdots p_\sigma'}{\sigma}$$

zu ersetzen, führt zu dem Ausdruck

$$\varepsilon'(p_i') = \sqrt{\frac{p_0' q_0'}{n}}, \tag{2}$$

worin $q_0' = 1 - p_0'$. Die direkte Methode ergiebt

$$\varepsilon''(p_i') = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=\sigma} (p_i' - p_0)^2}{\sigma}}$$

oder für den praktischen Gebrauch

$$\varepsilon''(p_i') = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{i=\sigma} (p_i' - p_0')^2}{\sigma - 1}}. \tag{3}$$

Bei einigermafsen grofsem σ ist zu erwarten, dafs die Gleichung

$$\varepsilon''(p_i') = \varepsilon'(p_i')$$

näherungsweise erfüllt sein werde und zwar mit um so höherem Grade der Annäherung, je gröfser die Zahl σ ist.

Die Erfahrung lehrt indessen, dafs $\varepsilon''(p_i')$ stets gröfser ausfällt als $\varepsilon'(p_i')$ oder auch dafs der Quotient

(4) $$Q' = \frac{\varepsilon''(p_i')}{\varepsilon'(p_i')}$$

stets gröfser ist als 1. Nicht selten erhält man Q' gleich 10, 20, 100 und mehr.

Es ist nun das Charakteristische der Untersuchungen, woraus sich eine derartige Discrepanz zwischen den Erwartungen der Theorie und den Thatsachen der Statistik ergab, dafs den untersuchten statistischen Reihen nicht nur grofse Beobachtungszahlen, sondern auch grofse (in die Tausende oder doch in die Hunderte) gehende Ereigniszahlen entsprachen. Man war geneigt, darin geradezu eine notwendige Voraussetzung der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf statistische Daten zu erblicken. Damit aber grofse Ereigniszahlen herauskommen, brauchte man nur die Beobachtungen an menschlichen Gesellschaften von hinreichender numerischer Stärke bezw. an Gebieten von hinreichender Ausdehnung anzustellen oder, m. a. W., ein entsprechend grofses Beobachtungsfeld zu wählen.

Die Erscheinungen des menschlichen Lebens, auf die sich die Beispiele des II. Kapitels beziehen, bilden keine Ausnahme von der allgemein geltenden Regel. Würde man z. B. die Relativzahlen der Selbstmorde (absolute Zahlen der Selbstmörder dividiert durch die entsprechenden Zahlen der Lebenden), welche die Statistik für ganz Deutschland in dem Zeitraum 1881—1894 nach Kalenderjahren nachweist, auf ihre Schwankungen hin einer Prüfung unterziehen, so erhielte man Q' gleich nahezu 5. Ähnlich bei den Unfällen mit tötlichem Ausgang. Rechnet man hingegen das analoge Verhältnis $\frac{\varepsilon''(x)}{\varepsilon'(x)}$ bezw. $\frac{\varepsilon_0''(x)}{\varepsilon_0'(x)}$ in den Beispielen des II. Kapitels aus, so findet man die Werte

1,12 im 1. Beispiel a),
0,88 „ b),
0,99 „ c),
1,15 „ 2. Beispiel,
1,12 „ 3. Beispiel,
1,01 „ 4. Beispiel a),
1,00 „ b).

Es liegt daher nahe anzunehmen, dafs gerade die grofsen Ereigniszahlen es seien, wodurch eine Nichtübereinstimmung der effektiven Dispersion mit der erwartungsmäfsigen herbeigeführt wird, während umgekehrt in den kleinen Ereigniszahlen, wie sie sämtlichen Beispielen des II. Kapitels gemein sind, die Ursache davon zu suchen sei, dafs in jenen Beispielen die Ergebnisse der Statistik mit den Erwartungen der Theorie fast vollständig zusammenfallen. Um diesen zunächst rein empirisch festgestellten Zusammenhang als einen notwendigen, gesetzmäfsigen zu erkennen, bedarf es einer ergänzenden theoretischen Erörterung.



§ 14.

Wir betrachten folgenden Fall: Die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit, als deren Näherungswerte die Gröfsen

$$p_1', p_2', \ldots p_\sigma'$$

erscheinen, bleibt nicht für alle σ Versuchsserien konstant, sondern ändert sich von Versuchsserie zu Versuchsserie und ist gleich p_1 bei der ersten Versuchsserie, gleich p_2 bei der zweiten, gleich p_3 bei der dritten u. s. w. Im allgemeinen entspricht also der Näherungswert p_i' einem exakten Wert p_i. Es sei

$$\frac{p_1 + p_2 + \cdots p_\sigma}{\sigma} = p_0$$

und wie vorhin

$$\frac{p_1' + p_2' + \cdots p_\sigma'}{\sigma} = p_0'.$$

Aufserdem

$$1 - p_i = q_i, \quad 1 - p_i' = q_i', \quad 1 - p_0 = q_0, \quad 1 - p_0' = q_0'.$$

Ich setze der Einfachheit halber voraus, dafs jede einzelne Versuchsserie aus einer gleichen Zahl n von Versuchen besteht.

Wir fragen nach der erwartungsmäfsigen Dispersion der Elemente $p_1', p_2', p_3' \ldots p_\sigma'$. Der mafsgebende mittlere quadratische Fehler, den wir mit $\delta(p_i')$ bezeichnen wollen, wird sich offenbar aus der Bedingungsgleichung

$$\{\delta(p_i')\}^2 = E\left(\sum \frac{(p_i' - p_0)^2}{\sigma}\right) \tag{1}$$

bestimmen, wobei E die in § 1 angegebene Bedeutung hat und das Zeichen Σ sich auf alle Werte i von 1 bis σ erstreckt.

Aus (1) erhält man:

$$\{\delta(p_i')\}^2 = E\left(\sum \frac{p_i'^2}{\sigma}\right) - 2p_0 E\left(\sum \frac{p_i'}{\sigma}\right) + p_0^2. \tag{2}$$

Es ist aber

$$E([p_i' - p_i]^2) = \frac{p_i q_i}{n},$$

woraus

$$E(p_i'^2) = p_i^2 + \frac{p_i q_i}{n}$$

folgt.

Aufserdem ist

$$E\left(\sum \frac{p_i'}{\sigma}\right) = p_0.$$

Demnach verwandelt sich (2) in:

$$\{\delta(p_i')\}^2 = \sum \frac{p_i^2}{\sigma} + \sum \frac{p_i q_i}{\sigma n} - p_0^2. \tag{3}$$

Der nunmehr gefundene Ausdruck des Quadrates des mittleren quadratischen Fehlers kann in folgender Weise umgeformt werden: Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit der Gleichung

$$p_i q_i = p_0 q_0 + (p_0 - q_0)(p_0 - p_i) - (p_i - p_0)^2.$$

Setzt man darin $i = 1, 2 \ldots$ bis σ und addiert einmal die linken und ein anderes Mal die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen, so kommt man auf die Beziehung

$$\Sigma p_i q_i = \sigma p_0 q_0 - \Sigma (p_i - p_0)^2. \tag{4}$$

Ferner besteht die Beziehung

$$\sum \frac{p_i^2}{\sigma} - p_0^2 = \sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}. \tag{5}$$

Auf Grund von (4) und (5) läfst sich (3) unter folgende Form bringen:

$$\{\delta(p_i')\}^2 = \frac{p_0 q_0}{n} + \frac{n-1}{n} \sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}. \tag{6}$$

Unter Anwendung der alten Bezeichnung

$$\sqrt{\frac{p_0 q_0}{n}} = \varepsilon(p_i') \tag{7}$$

und der neuen Bezeichnung

$$\sqrt{\frac{n-1}{n} \sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}} = \eta(p_i) \tag{8}$$

findet man noch

$$\delta(p_i') = \sqrt{\{\varepsilon(p_i')\}^2 + \{\eta(p_i)\}^2}. \tag{9}$$

Man verabrede sich die Grösse $\delta(p_i')$ den Totalfehler, die Gröfse $\varepsilon(p_i')$ den Normalfehler und die Grösse $\eta(p_i)$ den absoluten Fehlerexcedenten zu nennen.

Der Totalfehler läfst sich nach Formel (9) gleichsam auf zwei getrennt wirkende Fehlerquellen zurückführen. Die erste Fehlerquelle liegt in den „zufälligen Ursachen", welche eine Abweichung des jeweiligen Wertes p_i' von dem Wert p_i herbeiführen, und es entspricht dieser Fehlerquelle die Wirkung $\varepsilon(p_i')$. Die zweite Fehlerquelle, in den Schwankungen bestehend, welche die in Frage stehende Wahrscheinlichkeit im Laufe der σ Versuchsserien erfährt, ruft die Wirkung $\eta(p_i)$ hervor. Schliesslich findet in der Resultante $\delta(p_i')$ die combinierte Wirkung beider Fehlerquellen ihren Ausdruck.

Es ergiebt sich aus (8), dafs für den Fall, wo alle Werte p_i einander gleich sind, der absolute Fehlerexcedent gleich Null wird und der Totalfehler mit dem Normalfehler zusammenfällt. Dies trifft bei dem in § 13 angenommenen Schema zu und ist der Fall der normalen Dispersion (Lexis). Sind hingegen die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 \ldots p_\sigma$ einander nicht gleich, so übersteigt der Totalfehler den



Normalfehler um den Betrag $\frac{\{\eta(p_i)\}^2}{\delta(p_i') + \varepsilon(p_i')}$ und wir haben mit dem Fall der übernormalen Dispersion zu thun.

Man bilde den Ausdruck

$$\frac{\eta(p_i)}{\varepsilon(p_i')} = \lambda \tag{10}$$

und nenne ihn den relativen Fehlerexcedenten. Bezeichnet man ferner die von der Versuchszahl n unabhängige Grösse

$$\sqrt{\frac{1}{p_0 q_0} \sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}}$$

mit c, so ergiebt sich aus (7) und (8):

$$\lambda = c\sqrt{n-1}.$$

Demnach ist der relative Fehlerexcedent der Quadratwurzel aus der um 1 verminderten Versuchszahl proportional.

Den Quotienten

$$Q = \frac{\delta(p_i')}{\varepsilon(p_i')} \tag{11}$$

wollen wir kurz als die Fehlerrelation bezeichnen. Man hat

$$Q^2 - 1 = \lambda^2$$

und

$$Q = \sqrt{1 + \lambda^2} = \sqrt{1 + (n-1)c^2}.$$

Die Fehlerrelation ändert sich also ebenfalls mit sich ändernder Versuchszahl und zwar nimmt sie mit wachsender Versuchszahl zu und mit fallender Versuchszahl ab.

Eine gegebene Reihe $p_1, p_2, \ldots p_\sigma$ vorausgesetzt, sei bei einer Versuchszahl 100 000 die Fehlerrelation gleich 2.[1]) Es wird gefragt nach der Fehlerrelation bei einer Versuchszahl 10 000, 1000, 100.

Dazu ist erst die Konstante c aus der Gleichung $Q^2 = 1 + (n-1)c^2$ zu bestimmen, worin für Q die Zahl 2 und für n die Zahl 100 000 einzusetzen sind. Sodann erhält man

bei $n = 10000$, $\lambda = 0{,}548$, $Q = 1{,}140$;
„ $n = 1000$, $\lambda = 0{,}173$, $Q = 1{,}015$;
„ $n = 100$, $\lambda = 0{,}0545$, $Q = 1{,}0015$.

Aus obigem ist ersichtlich, dafs vermöge einer entsprechenden Verringerung der Versuchszahl eine stark übernormale Dispersion ($Q = 2$!) auf eine solche reduziert werden kann, die sich von der normalen Dispersion kaum noch unterscheidet ($Q = 1{,}0015$!).

Im vorstehenden sind die Dispersionsverhältnisse an Wahrschein-

1) Dem entsprechend ist $\lambda = 1{,}732$.

lichkeitsgrössen erörtert worden. Es erübrigt, die analogen Formeln für Ereigniszahlen zu entwickeln. Man setze

$$np_1' = x_1, \quad np_2' = x_2, \quad \ldots . \quad np_\sigma' = x_\sigma.$$

Die Zahlen $x_1, x_2, \ldots . x_\sigma$ geben offenbar an, in wie vielen Fällen aus n das in Frage stehende Ereignis bei den einzelnen Versuchsserien eingetreten ist. Aufserdem seien

$$np_1 = m_1, \quad np_2 = m_2, \quad \ldots . \quad np_\sigma = m_\sigma$$

die mathematischen Erwartungen der Ereigniszahlen. Man führe noch die Bezeichnung

$$\frac{m_1 + m_2 + \ldots . + m_\sigma}{\sigma} = m_0.$$

Die für die Reihe $x_1, x_2, \ldots x_\sigma$ mafsgebenden Totalfehler, Normalfehler und absolute Fehlerexcedent, die man in analoger Weise mit $\delta(x_i)$, $\varepsilon(x_i)$ und $\eta(m_i)$ bezeichnen mag, ergeben sich aus folgenden, des Beweises nicht bedürfenden Gleichungen:

$$\delta(x_i) = n \cdot \delta(p_i'),$$
$$\varepsilon(x_i) = n \cdot \varepsilon(p_i'),$$
$$\eta(m_i) = n \cdot \eta(p_i).$$

Daher denn ferner

$$\delta(x_i) = \sqrt{\{\varepsilon(x_i)\}^2 + \{\eta(m_i)\}^2},$$
$$\varepsilon(x_i) = \sqrt{np_0 q_0}$$

und

$$\eta(m_i) = \sqrt{\frac{n-1}{n} \sum \frac{(m_i - m_0)^2}{\sigma}}.$$

Was schliefslich den relativen Fehlerexcedenten (λ) und die Fehlerrelation (Q) anlangt, so fallen dieselben bei den Reihen $p_1', p_2', \ldots p_\sigma'$ und $x_1, x_2, \ldots x_\sigma$ zusammen.

§ 15.

Für den Spezialfall nun, wo die Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_\sigma$ unendlich kleine Gröfsen sind und n eine unendlich grofse Zahl ist, hat man in den zuletzt angeführten Formeln $\frac{1}{n} = 0$, $p_0 = 0$, $q_0 = 1$ zu setzen und erhält man:

$$\varepsilon(x_i) = \sqrt{m_0},$$
$$\eta(m_i) = \sqrt{\sum \frac{(m_i - m_0)^2}{\sigma}},$$
$$\delta(x_i) = \sqrt{m_0 + \sum \frac{(m_i - m_0)^2}{\sigma}},$$



$$\lambda = \sqrt{m_0 \sum \frac{1}{\sigma}\left(\frac{m_i}{m_0} - 1\right)^2}$$

und

$$Q = \sqrt{1 + m_0 \sum \frac{1}{\sigma}\left(\frac{m_i}{m_0} - 1\right)^2}.$$

Obige Formeln erscheinen, so wie sie hier abgeleitet sind, an die Voraussetzung einer konstanten Versuchszahl gebunden. In Wirklichkeit aber kann man letztere Einschränkung vermeiden, indem man unmittelbar von der Gleichung

$$\{\delta(x_i)\}^2 = E\left(\sum \frac{(x_i - m_0)^2}{\sigma}\right)$$

ausgeht und die aus § 1 bekannte Beziehung

$$E([x_i - m_i]^2) = m_i$$

heranzieht. Alsdann ergiebt sich in Übereinstimmung mit obigen Formeln

$$\{\delta(x_i)\}^2 = E\left(\sum \frac{x_i^2}{\sigma}\right) - 2m_0 E\left(\sum \frac{x_i}{\sigma}\right) + m_0^2$$

$$= \sum \frac{m_i^2 + m_i}{\sigma} - 2m_0^2 + m_0^2$$

$$= m_0 + \sum \frac{(m_i - m_0)^2}{\sigma}.$$

Der gelieferte Ausdruck für λ besagt dieses: Vermehrt man die Versuche bei sämtlichen x_i Bestimmungen der Reihe in gleichmäfsiger Weise, z. B. um k Male, ohne die den Zahlen zu Grunde liegenden Wahrscheinlichkeiten zu ändern, so erhöhen sich dadurch sämtliche m_i Werte, folglich auch m_0, um ebensoviel und mufs daher der relative Fehlerexcedent λ im Verhältnis von 1 zu $\sqrt{k}$ zunehmen. Die Abhängigkeit der Fehlerrelation Q von den Versuchszahlen kommt aber darin zum Ausdruck, dafs $Q^2 - 1$ der Zahl k direkt proportional ist.

§ 16.

Der im vorigen Paragraphen erörterte Fall unterscheidet sich von dem in § 4 behandelten dadurch, dafs an die Stelle einer unveränderlichen mathematischen Erwartung m so viele analoge Gröfsen m_1, $m_2, \ldots m_\sigma$ getreten sind, als Versuchsserien vorliegen. Wir wollen nunmehr das Schema des § 5 in entsprechender Weise modifizieren. Zu diesem Zwecke setzen wir voraus, dafs den Elementen einer bestimmten Zeile der in § 5 angeführten Tabelle nicht mehr ein und dieselbe mathematische Erwartung der Ereigniszahl (m_j) zu Grunde liegt, sondern dafs sich die in Frage stehende Erwartungsgröfse ändert, wobei einem Element $x_{i,j}$ eine mathematische Erwartung $m_{i,j}$ entspricht.

Man führe die Bezeichnungen ein:

$$\frac{1}{\sigma}(m_{1,j} + m_{2,j} + \cdots + m_{\sigma,j}) = m_{0,j}$$

und

$$\frac{1}{\nu}(m_{0,1} + m_{0,2} + \cdots + m_{0,\nu}) = m_{0,0}.$$

Für jede einzelne Zeile der Tabelle gelten als Normalfehler

$$\varepsilon_j(x_{i,j}) = \sqrt{m_{0,j}},$$

als absoluter Fehlerexcedent

$$\eta_j(m_{i,j}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=\sigma} \frac{(m_{i,j} - m_{0,j})^2}{\sigma}}$$

und als Totalfehler

$$\delta_j(x_{i,j}) = \sqrt{\{\varepsilon_j(x_{i,j})\}^2 + \{\eta_j(m_{i,j})\}^2}.$$

Setzt man nun

$$\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\{\varepsilon_j(x_{i,j})\}^2} = \varepsilon_0(x_{i,j}),$$

$$\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\{\eta_j(m_{i,j})\}^2} = \eta_0(m_{i,j}),$$

$$\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\{\delta_j(x_{i,j})\}^2} = \delta_0(x_{i,j}),$$

$$\frac{\eta_0(m_{i,j})}{\varepsilon_0(x_{i,j})} = \lambda_0$$

und

$$\frac{\delta_0(x_{i,j})}{\varepsilon_0(x_{i,j})} = Q_0,$$

so findet man

$$\varepsilon_0(x_{i,j}) = \sqrt{m_{0,0}},$$

$$\eta_0(m_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{(m_{i,j} - m_{0,j})^2}{\sigma}},$$

$$\delta_0(x_{i,j}) = \sqrt{\{\varepsilon_0(x_{i,j})\}^2 + \{\eta_0(m_{i,j})\}^2},$$

$$\lambda_0 = \sqrt{m_{0,0}\sum_{j=1}^{j=\nu}\frac{1}{\nu}\left(\frac{m_{0,j}}{m_{0,0}}\right)^2\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{m_{i,j}}{m_{0,j}} - 1\right)^2}$$

und

$$Q_0 = \sqrt{1 + \lambda_0^2}.$$

Die Art der Abhängigkeit der Gröfsen λ_0 und Q_0 von den Versuchszahlen ist, wie man sieht, genau die nämliche wie bei λ und Q nach den Schlufssätzen des § 15.

§ 17.

Das in §§ 14—16 behandelte Schema einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses bezw. einer veränderlichen mathematischen Erwartung der betreffenden Ereigniszahl giebt uns das erwünschte Mittel an die Hand, die in § 13 zur Sprache gebrachte Verschiedenheit in dem Verhalten der grofsen und der kleinen Ereigniszahlen einer Aufklärung näher zu bringen.

Entsprechend der Hypothese von einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit erscheint nämlich der nach der direkten Methode berechnete mittlere quadratische Fehler $\varepsilon''(p_i')$ [s. § 13, (3)] nicht mehr als Näherungswert von $\varepsilon(p_i')$ [s. § 13, (1)], sondern als Näherungswert des Totalfehlers $\delta(p_i')$ [s. § 14, (1)], während der nach der indirekten Methode berechnete mittlere quadratische Fehler $\varepsilon'(p_i')$ [s. § 13, (2)] den Charakter eines Näherungswertes des Normalfehlers $\varepsilon(p_i')$ [s. § 13, (7)] gewinnt.

Somit mufs (bei einigermafsen grofsen n und σ) der Quotient Q' [s. § 13, (4)] als Näherungswert von Q [s. § 14, (11)] aufgefafst werden.

Ferner erscheinen, gemäfs der Voraussetzung einer wechselnden mathematischen Erwartung der Ereigniszahl, die in § 4 vorkommenden Gröfsen $\varepsilon'(x)$ und $\varepsilon''(x)$ als Näherungswerte der aus § 15 bekannten Gröfsen $\varepsilon(x_i)$ bezw. $\delta(x_i)$.

Schliefslich entsprechen, nach dem neuen Schema, den Näherungswerten $\varepsilon_0'(x)$ und $\varepsilon_0''(x)$ des § 5 die exakten Werte $\varepsilon_0(x_{i,j})$ und $\delta_0(x_{i,j})$ des § 16.

Mit Hilfe der Hypothese von einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit läfst sich nun das in § 13 erwähnte Resultat $\varepsilon''(p_i') > \varepsilon'(p_i')$ ohne weiteres erklären, weil nämlich der Ausdruck $\sqrt{\{\varepsilon''(p_i')\}^2 - \{\varepsilon'(p_i')\}^2}$ einen Näherungswert des absoluten Fehlerexcedenten $\eta(p_i)$ liefert, welch' letzterer bei einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit nicht Null, noch weniger aber eine irrationale Gröfse sein kann.

Jene Hypothese bedingt aber noch ein anderes: nämlich die Thatsache, dafs $\frac{\varepsilon''(p_i')}{\varepsilon'(p_i')}$ und $\frac{\varepsilon''(x)}{\varepsilon'(x)}$ in ihrer Eigenschaft als Näherungsausdrücke von $Q = \frac{\delta(p_i')}{\varepsilon(p_i')}$ bezw. $\frac{\delta(x_i)}{\varepsilon(x_i)}$ sich ceteris paribus (d. h. bei gleich starken Schwankungen der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 \ldots p_\sigma$) um so weniger von 1 unterscheiden, je kleiner das Beobachtungsfeld ist, auf welches sich jedes einzelne Element der statistischen Reihe bezieht. Dasselbe gilt von dem Quotienten $\frac{\varepsilon_0''(x)}{\varepsilon_0'(x)}$ als einem Näherungswert von Q_0.

Nun realisieren sich die Erwartungen bezüglich des Verhaltens jener Quotienten in trefflicher Weise. Unter der Bedingung eines beschränkten Beobachtungsfeldes erhält man, wie wir wissen, eine

Man führe die Bezeichnungen ein:

$$\frac{1}{\sigma}(m_{1,j} + m_{2,j} + \cdots + m_{\sigma,j}) = m_{0,j}$$

und

$$\frac{1}{\nu}(m_{0,1} + m_{0,2} + \cdots + m_{0,\nu}) = m_{0,0}.$$

Für jede einzelne Zeile der Tabelle gelten als Normalfehler

$$\varepsilon_j(x_{i,j}) = \sqrt{m_{0,j}},$$

als absoluter Fehlerexcedent

$$\eta_j(m_{i,j}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{i=\sigma} \frac{(m_{i,j} - m_{0,j})^2}{\sigma}}$$

und als Totalfehler

$$\delta_j(x_{i,j}) = \sqrt{\{\varepsilon_j(x_{i,j})\}^2 + \{\eta_j(m_{i,j})\}^2}.$$

Setzt man nun

$$\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\{\varepsilon_j(x_{i,j})\}^2} = \varepsilon_0(x_{i,j}),$$

$$\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\{\eta_j(m_{i,j})\}^2} = \eta_0(m_{i,j}),$$

$$\sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\{\delta_j(x_{i,j})\}^2} = \delta_0(x_{i,j}),$$

$$\frac{\eta_0(m_{i,j})}{\varepsilon_0(x_{i,j})} = \lambda_0$$

und

$$\frac{\delta_0(x_{i,j})}{\varepsilon_0(x_{i,j})} = Q_0,$$

so findet man

$$\varepsilon_0(x_{i,j}) = \sqrt{m_{0,0}},$$

$$\eta_0(m_{i,j}) = \sqrt{\frac{1}{\nu}\sum_{j=1}^{j=\nu}\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{(m_{i,j} - m_{0,j})^2}{\sigma}},$$

$$\delta_0(x_{i,j}) = \sqrt{\{\varepsilon_0(x_{i,j})\}^2 + \{\eta_0(m_{i,j})\}^2},$$

$$\lambda_0 = \sqrt{m_{0,0}\sum_{j=1}^{j=\nu}\frac{1}{\nu}\left(\frac{m_{0,j}}{m_{0,0}}\right)^2\sum_{i=1}^{i=\sigma}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{m_{i,j}}{m_{0,j}} - 1\right)^2}$$

und

$$Q_0 = \sqrt{1 + \lambda_0^2}.$$

Die Art der Abhängigkeit der Gröfsen λ_0 und Q_0 von den Versuchszahlen ist, wie man sieht, genau die nämliche wie bei λ und Q nach den Schlufssätzen des § 15.

§ 17.

Das in §§ 14—16 behandelte Schema einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit des betreffenden Ereignisses bezw. einer veränderlichen mathematischen Erwartung der betreffenden Ereigniszahl giebt uns das erwünschte Mittel an die Hand, die in § 13 zur Sprache gebrachte Verschiedenheit in dem Verhalten der grofsen und der kleinen Ereigniszahlen einer Aufklärung näher zu bringen.

Entsprechend der Hypothese von einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit erscheint nämlich der nach der direkten Methode berechnete mittlere quadratische Fehler $\varepsilon''(p_i')$ [s. § 13, (3)] nicht mehr als Näherungswert von $\varepsilon(p_i')$ [s. § 13, (1)], sondern als Näherungswert des Totalfehlers $\delta(p_i')$ [s. § 14, (1)], während der nach der indirekten Methode berechnete mittlere quadratische Fehler $\varepsilon'(p_i')$ [s. § 13, (2)] den Charakter eines Näherungswertes des Normalfehlers $\varepsilon(p_i')$ [s. § 13, (7)] gewinnt.

Somit mufs (bei einigermafsen grofsen n und σ) der Quotient Q' [s. § 13, (4)] als Näherungswert von Q [s. § 14, (11)] aufgefafst werden.

Ferner erscheinen, gemäfs der Voraussetzung einer wechselnden mathematischen Erwartung der Ereigniszahl, die in § 4 vorkommenden Gröfsen $\varepsilon'(x)$ und $\varepsilon''(x)$ als Näherungswerte der aus § 15 bekannten Gröfsen $\varepsilon(x_i)$ bezw. $\delta(x_i)$.

Schliefslich entsprechen, nach dem neuen Schema, den Näherungswerten $\varepsilon_0'(x)$ und $\varepsilon_0''(x)$ des § 5 die exakten Werte $\varepsilon_0(x_{i,j})$ und $\delta_0(x_{i,j})$ des § 16.

Mit Hilfe der Hypothese von einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit läfst sich nun das in § 13 erwähnte Resultat $\varepsilon''(p_i') > \varepsilon'(p_i')$ ohne weiteres erklären, weil nämlich der Ausdruck $\sqrt{\{\varepsilon''(p_i')\}^2 - \{\varepsilon'(p_i')\}^2}$ einen Näherungswert des absoluten Fehlerexcedenten $\eta(p_i)$ liefert, welch' letzterer bei einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit nicht Null, noch weniger aber eine irrationale Gröfse sein kann.

Jene Hypothese bedingt aber noch ein anderes: nämlich die Thatsache, dafs $\frac{\varepsilon''(p_i')}{\varepsilon'(p_i')}$ und $\frac{\varepsilon''(x)}{\varepsilon'(x)}$ in ihrer Eigenschaft als Näherungsausdrücke von $Q = \frac{\delta(p_i')}{\varepsilon(p_i')}$ bezw. $\frac{\delta(x_i)}{\varepsilon(x_i)}$ sich ceteris paribus (d. h. bei gleich starken Schwankungen der Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2 \ldots p_\sigma$) um so weniger von 1 unterscheiden, je kleiner das Beobachtungsfeld ist, auf welches sich jedes einzelne Element der statistischen Reihe bezieht. Dasselbe gilt von dem Quotienten $\frac{\varepsilon_0''(x)}{\varepsilon_0'(x)}$ als einem Näherungswert von Q_0.

Nun realisieren sich die Erwartungen bezüglich des Verhaltens jener Quotienten in trefflicher Weise. Unter der Bedingung eines beschränkten Beobachtungsfeldes erhält man, wie wir wissen, eine



nahezu normale Dispersion bezw. eine fast vollständige Übereinstimmung zwischen den mittleren Fehlern, von denen der eine nach der direkten, der andere nach der indirekten Methode berechnet ist. Je kleiner das Beobachtungsfeld, je seltener in einer gegebenen Gesellschaft das in Frage stehende Ereignis, wie z. B. Selbstmord oder Unfall, vorkommt, um so besser fügen sich die statistischen Ergebnisse in die mafsgebende mathematische Formel.

Die Hypothese einer veränderlichen Wahrscheinlichkeits- bezw. Erwartungsgröfse hilft uns dieses Verhalten als ein gesetzmäfsiges erkennen und in diesem Sinn kann die Thatsache, dafs kleine Ereigniszahlen (bei sehr grofsen Beobachtungszahlen) einer bestimmten Norm der Schwankungen unterworfen sind bezw. nach einer solchen tendieren, das Gesetz der kleinen Zahlen wohl benannt werden.

§ 18.

Es ist früher ganz allgemein üblich gewesen, die Relativzahlen der Statistik, sofern sie bestimmten formalen Bedingungen Genüge leisteten (vgl. § 13), als Näherungswerte von Wahrscheinlichkeitsgröfsen aufzufassen und gelegentlich als solche zu behandeln, ohne sich um die Frage nach der Zulässigkeit einer derartigen Betrachtungsweise im mindesten zu bekümmern. Diesen Standpunkt der naiven Zuversicht finden wir von Poisson und Quetelet vertreten und von den Neueren vielfach geteilt.

Hier, an der Grundvorstellung, mit der Kritik angesetzt zu haben, ist das rühmliche Verdienst Lexis'. Von ihm rührt der Gedanke her, den Charakter einer statistischen Relativzahl als Näherungswert einer mathematischen Wahrscheinlichkeit nicht als etwas von selbst gegebenes, sondern als etwas, was an der Hand der Erfahrung geprüft werden mufs, zu betrachten.[1]) Worin kann aber die verlangte Prüfung bestehen?

Die Antwort lautete bei Lexis etwa wie folgt: es sind die Schwankungen (die Dispersionsverhältnisse) zu untersuchen, welche eine Reihe von statistischen Relativzahlen aufweist, hinsichtlich deren gefragt wird, ob sie als Näherungswerte einer gemeinschaftlichen Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden dürfen. Man mufs namentlich zusehen, ob die faktische Dispersion mit derjenigen übereinstimmt, welche zu erwarten wäre auf Grund der Voraussetzung, dafs den zu einer Reihe verbundenen Relativzahlen ein und dieselbe mathematische Wahrscheinlichkeit entspricht. Hierbei empfahl Lexis das uns bekannte Verfahren, den mittleren quadratischen Fehler einmal nach der indirekten („combinatorischen“), ein anderes Mal nach der direkten („physikalischen“) Methode zu berechnen und die Resultate beider Methoden einander

1) Zur Theorie u. s. w. §§ 11—12 fg.

gegenüberzustellen. Je nach dem Ergebnis des Vergleiches zwischen der effektiven und der erwartungsmäfsigen Dispersion bezw. zwischen den in verschiedener Weise berechneten mittleren Fehlern ist nun die Entscheidung zu treffen, ob die untersuchten Relativzahlen Näherungswerte einer bestimmten Wahrscheinlichkeit seien oder nicht seien.

Lexis hat nun selbst eine Anzahl statistischer Relativzahlen auf ihre Dispersionsverhältnisse hin untersucht und ist zu Ergebnissen gekommen, wovon das wesentliche eingangs dieses Kapitels erwähnt worden ist.

Es hiefse, sich vom Thema entfernen, wollte man hier auf die Bedeutung eingehen, welche den Lexis'schen Untersuchungen insofern zukommt, als durch deren Resultate ziemlich verbreitet gewesene irrige Anschauungen von dem Wesen der statistischen Gesetzmäfsigkeit endgiltig widerlegt worden sind.

Man hat sich vielmehr die Frage zu stellen, ob jene Resultate dazu berechtigten, den meisten statistischen Relativzahlen jedwede Beziehung zur Wahrscheinlichkeitsrechnung abzusprechen. Wohl durfte als ausgemacht gelten, dafs die Einzelwerte von statistischen Reihen den ihnen in etwas leichtsinniger Weise zugeschriebenen Charakter, Näherungswerte einer gemeinschaftlichen, in der Zeit unveränderlichen Wahrscheinlichkeit zu sein, abzulegen gezwungen waren. War aber das ins Auge gefafste Schema der Wahrscheinlichkeitsrechnung, das sich als unbrauchbar erwiesen hatte, das einzige, welches überhaupt in Betracht kommen kann? Oder hat es vielleicht ein Interesse, zu prüfen, ob die statistischen Reihen nicht zurückgeführt werden können auf das Schema einer in der Zeit veränderlichen Wahrscheinlichkeit, wobei also den einzelnen Elementen einer statistischen Reihe numerisch verschiedene Wahrscheinlichkeiten untergelegt werden müfsten?

Diese Eventualität war dem Verfasser des Werkes „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft" nicht entgangen.[1]) Aber er hat sich nicht länger dabei aufgehalten, hauptsächlich wohl aus dem Grunde, weil die Frage, möchte ihre Entscheidung im positiven oder im negativen Sinne ausfallen, von dem eigentlichen Beweisthema der Schrift gewissermafsen abseits lag.

Erst später hat Lexis das Schema einer von Versuchsserie zu Versuchsserie sich ändernden Wahrscheinlichkeit in dessen Anwendung auf die Statistik zum Gegenstand einer eingehenden Erörterung gemacht.[2])

Als mathematische Grundlage hat ihm dabei eine Formel gedient, die bis auf den Faktor $\frac{n-1}{n}$ mit Formel (6) des § 14 übereinstimmt. Lexis setzte nämlich

1) Zur Theorie u. s. w., S. 31, 91.
2) Über die Theorie der Stabilität statistischer Reihen.



$$\{\delta(p_i')\}^2 = \frac{p_0 q_0}{n} + \sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}.$$

Der Unterschied zwischen letzterer Formel und der meinigen rührt davon her, dafs Lexis sich bewufster Weise einer nicht ganz strengen Beweismethode bedient hat. Praktisch ist der Unterschied bei einigermafsen grofsem n unerheblich — und gerade diesen Fall hat Lexis im Auge gehabt; ist aber n keine grofse Zahl mehr, so erscheint Formel (6) des § 14 als die einzig anwendbare. Selbst bei $n = 1$ liefert sie ein zutreffendes Resultat, wie es übrigens der Art ihrer Ableitung zufolge nicht anders sein kann.

Lexis wendete ferner seine Aufmerksamkeit derjenigen Gröfse zu, die ich in § 13 mit Q' bezeichnet habe, und zeigte, dafs dieselbe in ihrer Eigenschaft als Näherungswert von Q im Sinne des § 14 in bekannter Weise von der Versuchszahl abhängt. Daraus folgerte er nun, dafs, falls das Schema einer von Versuchsserie zu Versuchsserie sich ändernden Wahrscheinlichkeit dem statistischen Geschehen adäquat sein sollte, sich für Q' Werte herausstellen müfsten, die um so weniger von 1 abweichen würden, je kleiner das gewählte Beobachtungsfeld sein würde. Es ist Lexis auch gelungen, bei einer Anzahl von Fällen mit relativ mäfsigen Beobachtungs- und Ereigniszahlen als Werte von Q' Gröfsen zu finden, welche von 1 nicht sehr verschieden waren. Die Ergebnisse waren jedoch nicht in dem Grade beweiskräftig, dafs sie zu dem Schlusse auf die Allgemeingiltigkeit des Schemas einer veränderlichen Wahrscheinlichkeit für die Statistik berechtigten.

Das Gesetz der kleinen Zahlen erscheint nun als Ergebnis einer Weiterführung jener Lexis'schen Untersuchungen und bildet in theoretischer Beziehung vielleicht gar einen Abschlufs derselben. Durch Verwendung kleiner und kleinster Ereigniszahlen ist es möglich geworden, den relativen Fehlerexcedenten bezw. die Wirkung der Veränderungen der Wahrscheinlichkeit auf ein Minimum zu reduzieren und auf diese Weise eine nahezu normale Dispersion herbeizuführen. Jene fast vollständige Übereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung, welche sich hierbei herausstellt, gestattet kaum noch einen Zweifel über die objektive Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs für die untersuchten Gebiete des statistischen Geschehens. Wenn auch das Beobachtungsfeld, auf welches sich die Untersuchung im 2. Kapitel bezieht, ein örtlich und zeitlich beschränktes ist, so erscheint die erwähnte Schlufsfolgerung auf den objektiven Charakter des Wahrscheinlichkeitsbegriffs an ähnliche Schranken nicht gebunden. Was in dieser Beziehung von Selbstmorden oder Unfällen in einzelnen Territorien bezw. für bestimmte Personenkreise und für bestimmte Zeiträume gilt, mufs offenbar eine allgemeine Geltung haben. Wo und wann immer in einer menschlichen Gesellschaft Selbstmorde begangen werden und sich Unfälle ereignen, dürfte die Art des Zustandekommens dieser Geschehnisse eine solche sein, welche die Anwendung des Wahrschein-

keitsbegriffes zuläfst. Dafs letzteres auch in Betreff anderer Erscheinungen zutrifft, die in den Bereich der Bevölkerungs- und der Moralstatistik gehören, halte ich für meinen Teil für nicht weniger sicher und glaube, dafs sich das Gesetz der kleinen Zahlen allenthalben werde verifizieren lassen. Nichtsdestoweniger erscheint mir eine Vermehrung der Beispiele zu dem Gesetz der kleinen Zahlen wegen der prinzipiellen Bedeutung der Frage als sehr erwünscht.

Jedes ausgerechnete neue Beispiel wird, falls es, wie zu erwarten ist, zu gleich günstigen Ergebnissen führt wie die Beispiele des 2. Kapitels, die wissenschaftliche Überzeugung erhärten helfen, dafs allen bevölkerungs- und moralstatistischen Zahlen mathematische Wahrscheinlichkeiten oder Funktionen solcher zu Grunde liegen.



Anlage 1.

Man setze

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{1\cdot 2\cdots x}p^x q^{n-x} = P_{n,x},$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} P_{n,x}\, x^r = \xi_n^{(r)}$$

und

$$\sum_{x=0}^{x=n} P_{n,x}(x-m)^r = \omega_n^{(r)},$$

wobei

$$m = np, \qquad p+q=1.$$

Die Aufgabe, welche hier gelöst werden soll, besteht darin, die angegebenen Summationen für $r = 1, 2, 3, 4$ auszuführen.

Es besteht die Beziehung

$$P_{n,x} = P_{n-1,x-1}\frac{pn}{x}.$$

Daher

(1) $$P_{n,x}\,x = pn P_{n-1,x-1}$$

und

(2) $$P_{n,x}\,x^r = pn x^{r-1} P_{n-1,x-1}.$$

Von der Gleichung

$$x^{r-1} = (x-1)^{r-1} + (r-1)(x-1)^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}(x-1)^{r-3} + \cdots + (r-1)(x-1) + 1$$

ausgehend, bekommt man ferner aus (2):

(3) $$P_{n,x}\,x^r = pn\left\{P_{n-1,x-1}(x-1)^{r-1} + (r-1)P_{n-1,x-1}(x-1)^{r-2} + \frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}P_{n-1,x-1}(x-1)^{r-3} + \cdots P_{n-1,x-1}\right\}.$$

Setzt man in (3) $x = 1, 2, 3\ldots$ bis n und addiert einmal die linken und ein anderes Mal die rechten Seiten der so erhaltenen Gleichungen, so kommt man auf die Formel

(4) $$\xi_n^{(r)} = pn\left\{\xi_{n-1}^{(r-1)} + (r-1)\xi_{n-1}^{(r-2)} + \frac{(r-1)(r-2)}{1\cdot 2}\xi_{n-1}^{(r-3)} + \cdots + (r-1)\xi_{n-1}^{(1)} + \xi_{n-1}^{(0)}\right\}.$$



Weil aber $\xi_{n-1}^{(0)} = \sum_{x=0}^{x=n-1} P_{n-1,x} = (q+p)^{n-1} = 1$, kann (4) symbolisch so ausgedrückt werden:

$$(4') \qquad \xi_n^{(r)} = pn\,(\xi_{n-1} + 1)^{r-1}.$$

Für die Fälle $r = 1, 2, 3, 4$ hat man demnach:

$$\xi_n^{(1)} = pn,$$
$$\xi_n^{(2)} = pn\,(\xi_{n-1}^{(1)} + 1),$$
$$\xi_n^{(3)} = pn\,(\xi_{n-1}^{(2)} + 2\,\xi_{n-1}^{(1)} + 1),$$
$$\xi_n^{(4)} = pn\,(\xi_{n-1}^{(3)} + 3\,\xi_{n-1}^{(2)} + 3\,\xi_{n-1}^{(1)} + 1).$$

Die in obigen Formeln vorkommenden Gröfsen $\xi_{n-1}^{(1)}$, $\xi_{n-1}^{(2)}$ und $\xi_{n-1}^{(3)}$ können leicht eliminiert werden. Man findet nämlich $\xi_{n-1}^{(1)}$ aus $\xi_n^{(1)}$, indem man darin n durch $n-1$ ersetzt und ebenso $\xi_{n-1}^{(2)}$ aus $\xi_n^{(2)}$ u. s. w. So gelangt man schliefslich zu den Formeln:

$$\xi_n^{(1)} = np,$$
$$\xi_n^{(2)} = n^2p^2 + np - np^2,$$
$$\xi_n^{(3)} = n^3p^3 + 3n^2p^2 - 3n^2p^3 + np - 3np^2 + 2np^3,$$
$$\xi_n^{(4)} = n^4p^4 + 6n^3p^3 - 6n^3p^4 + 7n^2p^2 - 18n^2p^3 + 11n^2p^4 + np - 7np^2 + 12np^3 - 6np^4,$$

oder auch

$$(5) \qquad \xi_n^{(1)} = m,$$
$$(6) \qquad \xi_n^{(2)} = m^2 + mq,$$
$$(7) \qquad \xi_n^{(3)} = m^3 + 3m^2q + mq\,(q-p),$$
$$(8) \qquad \xi_n^{(4)} = m^4 + 6m^3q + 7m^2q + mq - 11m^2pq - 6mpq^2.$$

Zur Bestimmung von $\omega_n^{(r)}$ dient die Zerlegung

$$\omega_n^{(r)} = \xi_n^{(r)} - r\,\xi_n^{(r-1)}\,m + \frac{r\,(r-1)}{1 \cdot 2}\,\xi_n^{(r-2)}\,m^2 - \cdots \pm m^r,$$

welche für die Fälle $r = 1, 2, 3, 4$ folgende Ausdrücke liefert:

$$(9) \qquad \omega_n^{(1)} = 0,$$
$$(10) \qquad \omega_n^{(2)} = mq,$$
$$(11) \qquad \omega_n^{(3)} = mq\,(q-p),$$
$$(12) \qquad \omega_n^{(4)} = 3m^2q^2 + mq - 6mpq^2.$$

Die letzte Gleichung kann auch unter die Form gebracht werden:

$$\omega_n^{(4)} = 3\,(mq)^2 + (1 - 6pq)\,mq,$$

woraus die Ungleichungen

$$3\,(mq)^2 - \frac{mq}{2} < \omega_n^{(4)} < 3\,(mq)^2 + mq$$

folgen, weil

$$0 < pq < \frac{1}{4}.$$

Anlage 2.

In dem Schema des § 14 erscheinen die darin vorkommenden Wahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, \ldots p_\sigma$ als vollständig unabhängig von einander. Es sind aber auch Fälle denkbar, wo zwischen den Gliedern der Reihe $p_1, p_2, \ldots p_\sigma$ irgend welche wahrscheinlichkeitsrechnerische Beziehung besteht.

Ein besonderer Fall dieser Art, welcher für die Statistik von Interesse sein dürfte, soll hier zur Erörterung gebracht werden.

Man wolle sich diesen Fall zuerst in Gestalt eines Zufallsspieles vorstellen.

Es liegen ν Urnen $C_1, C_2, \ldots C_\nu$ vor, welche in verschiedener Zusammensetzung mit weifsen und schwarzen Kugeln gefüllt sind. Die Wahrscheinlichkeiten der Ziehung einer weissen Kugel seien bei den einzelnen Urnen $c_1, c_2, \ldots c_\nu$.

Man bestimmt durch das Los die Urne, aus welcher die ersten k Ziehungen zu erfolgen haben. Es seien hierbei $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ die Wahrscheinlichkeiten, die erste, die zweite ..., die ν^{te} Urne durch das Los zu treffen. Nachdem die ersten k Ziehungen gemacht sind, bestimmt man von neuem und zwar genau in der nämlichen Weise wie das erste Mal durch das Los die Urne, aus welcher die nächstfolgenden k Ziehungen zu erfolgen haben, und fährt so fort. Offenbar ist

$$g_1 + g_2 + \ldots g_\nu = 1.$$

Man nenne Elementarserie eine aus k Ziehungen, welche sämtlich aus derselben Urne erfolgt sind, bestehende Reihe und verbinde je μ Elementarserien zu einer Hauptserie. Man setze dabei

$$k\mu = n.$$

Es sei ferner

$$g_1 c_1 + g_2 c_2 + \cdots g_\nu c_\nu = c_0$$

und es seien

$$p_1', p_2', \cdots p_\sigma'$$

die Werte des Verhältnisses der Zahl der gezogenen weissen Kugeln zu der Zahl der überhaupt gezogenen Kugeln bei σ verschiedenen, aus je n Ziehungen bestehenden Hauptserien.



Man bezeichne mit $B_1, B_2, \ldots B_\mu$ die bei irgend einer, also z. B. bei der i^{ten} Hauptserie unter den genannten benützten Urnen und mit $b_1, b_2, \ldots b_\mu$ die ihnen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten der Ziehung einer weissen Kugel. Man setze aufserdem

$$\frac{b_1 + b_2 + \cdots b_\mu}{\mu} = p_i.$$

Bezeichnet man noch mit $b_1', b_2', \ldots b_\mu'$ die Werte des Verhältnisses der Zahl der gezogenen weifsen Kugeln zu der Zahl der überhaupt gezogenen Kugeln bei den aufeinander folgenden μ Elementarserien, so ist offenbar:

$$\frac{1}{\mu}(b_1' + b_2' + \cdots b_\mu') = p_i'.$$

Die Gröfse p_i' erscheint zunächst als Ergebnis einer Serie von Versuchen, welche an dem Urnensystem $B_1, B_2, \ldots B_\nu$ ausgeführt worden sind. Letzterer Urnenreihe entspricht aber als Wahrscheinlichkeit der Ziehung einer weifsen Kugel die Gröfse p_i. Daher kann diese als mathematische Erwartung von p_i' angesehen werden. Die Gröfse p_i ist aber ihrerseits das Ergebnis einer Serie von Versuchen, die an dem ursprünglich gegebenen Urnensystem $C_1, C_2, \ldots C_\nu$ gemacht worden sind und darin bestanden haben, dafs durch das Los aus dem C-System das B-System abgeleitet worden ist. Das C-System liefert aber als Wahrscheinlichkeit der Ziehung einer weifsen Kugel die Gröfse c_0. Also stellt sich c_0 als mathematische Erwartung von p_i dar. Zugleich kann aber c_0 als mathematische Erwartung von p_i' aufgefafst werden. Man wolle sich verabreden, für den angedeuteten Sachverhalt die Bezeichnungen einzuführen

$$E_1(p_i') = p_i,$$
$$E_1(p_i) = c_0,$$
$$E_2(p_i') = c_0$$

und dieselbe Bezeichnungsweise, nämlich die Indices bei dem Erwartungszeichen E, welche gewissermafsen den Entfernungsgrad der mathematischen Erwartung angeben sollen, auf analoge Fälle in folgendem anzuwenden.

Nun fragen wir nach der erwartungsmäfsigen Dispersion der Reihe

$$p_1', p_2' \cdots p_\sigma',$$

bezw. nach dem summarischen Ausdruck jener Dispersion, nämlich nach dem Wert der mathematischen Erwartung

$$E_2[(p_i' - c_0)^2].$$

Von der Gleichung

$$p_i' - p_i = \frac{(b_1' - b_1) + (b_2' - b_2) + \cdots (b_\mu' - b_\mu)}{\mu}$$

ausgehend, erhält man auf Grund der bekannten Beziehungen

$$E_1[(b_j' - b_j)^2] = \frac{b_j(1 - b_j)}{k}$$

und

$$E_1(b_j') = b_j,$$

die Gleichung

$$E_1[(p_i' - p_i)^2] = \frac{\sum_{j=1}^{j=\mu} b_j(1 - b_j)}{k\mu^2}.$$

Ferner hat man

$$E_1[b_j(1 - b_j)] = g_1 c_1(1 - c_1) + g_2 c_2(1 - c_2) + \cdots + g_\nu c_\nu (1 - c_\nu).$$

Die rechte Seite letzterer Gleichung läfst sich aber in folgender Weise umformen. Bildet man für alle Werte von i (von 1 bis ν) Gleichungen der Art

$$c_i(1 - c_i) = c_0(1 - c_0) + (1 - 2c_0)(c_i - c_0) - (c_i - c_0)^2,$$

deren Richtigkeit einleuchtet, multipliziert sie jeweils mit g_i und addiert einmal ihre linken und ein anderes Mal ihre rechten Seiten, so erhält man

$$g_1 c_1(1 - c_1) + \cdots g_\nu c_\nu(1 - c_\nu) = c_0(1 - c_0) - \alpha^2,$$

wobei

$$\alpha^2 = g_1(c_1 - c_0)^2 + g_2(c_2 - c_0)^2 + \cdots g_\nu(c_\nu - c_0)^2.$$

Daher denn

$$E_1[b_j(1 - b_j)] = c_0(1 - c_0) - \alpha^2$$

und

$$E_2[(p_i' - p_i)^2] = \frac{c_0(1 - c_0) - \alpha^2}{n},$$

woraus noch

$$E_2(p_i'^2) = E_1(p_i^2) + \frac{c_0(1 - c_0) - \alpha^2}{n}$$

folgt.

Um $E_1(p_i^2)$ zu bestimmen, bedient man sich der ohne weiteres verständlichen Gleichung

$$E_1[(b_j - c_0)^2] = \alpha^2,$$

welche zu der anderen

$$E_1[(p_i - c_0)^2] = \frac{\alpha^2}{\mu} \tag{1}$$

führt. Demnach ist

$$E_1(p_i^2) = c_0^2 + \frac{\alpha^2}{\mu} \tag{2}$$

und

$$E_2(p_i'^2) = c_0^2 + \frac{\alpha^2}{\mu} + \frac{c_0(1 - c_0) - \alpha^2}{n}. \tag{3}$$

Schliefslich ergiebt sich

$$E_2[(p_i' - c_0)^2] = \frac{c_0(1 - c_0)}{n} + \frac{k - 1}{n}\alpha^2. \tag{4}$$



Letzterer Formel entnehmen wir folgendes: bei $k = 1$ führt der untersuchte Spielmodus auf genau den nämlichen mittleren quadratischen Fehler, wie in dem Fall, wo alle Ziehungen aus ein und derselben Urne erfolgen, wobei die Wahrscheinlichkeit der Ziehung einer weifsen Kugel c_0 ist. Diesen Fall hat Poisson bei der Aufstellung seines „Gesetzes der grofsen Zahlen", insofern letzteres als eine Verallgemeinerung des Theorems Jacob Bernoulli's gedacht ist, im Auge gehabt.[1])

Hingegen überschreitet das Quadrat des mittleren quadratischen Fehlers den Wert $\frac{c_0(1-c_0)}{n}$, sobald k gröfser ist, als 1, gesetzt, dafs α^2 nicht Null ist, oder, was dasselbe bedeutet, dafs die Wahrscheinlichkeiten $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ nicht einander gleich sind. Der Überschufs $\frac{k-1}{n}\alpha^2$ rührt also davon her, dafs nicht schon nach jedem einzelnen Versuch die Urne, aus welcher die Ziehung erfolgen soll, von neuem bestimmt wird, sondern erst nach je k Versuchen.

Will man nun dem erörterten Fall eine allgemeine Fassung geben, so hat man nur anstatt ν Urnen ebenso viele Ursachen zu setzen, da die Thatsache, dafs die jeweilige Ziehung aus einer bestimmten Urne erfolgt, in der Sprache der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Ursache bezeichnet wird. Und weiter hat man sich an Stelle der Ziehung einer weifsen Kugel das Eintreten eines beliebigen Ereignisses von gleich grofser Wahrscheinlichkeit vorzustellen. Alsdann kann man sagen, dafs der untersuchte Fall durch eine Solidarität der Einzelversuche charakterisiert ist. Man versteht darunter die Thatsache, dafs eine zufällige Ursache (also im obigen Beispiel die Nummer der Urne, aus welcher gezogen wird) mehreren Versuchen gemeinsam ist, so dafs in Bezug auf diese Ursache die einzelnen Versuche nicht mehr als unabhängig voneinander erscheinen.[2]) Der Umstand, dafs eine oder mehrere solidarisch wirkende Ursachen im Spiel sind, bedingt also eine Erhöhung des Quadrats des mittleren quadratischen Fehlers um den Betrag $\frac{k-1}{n}\alpha^2$.

Nach dem Vorstehenden ist die Möglichkeit gegeben, die in der Statistik so oft beobachtete beträchtliche positive Differenz zwischen dem nach der direkten und dem nach der indirekten Methode berechneten mittleren quadratischen Fehler (vgl. § 13) mit Hilfe der Vorstellung von solidarisch wirkenden Ursachen zu erklären. Man kann annehmen, dafs gewisse, noch als „zufällige" erscheinende Ursachen

1) Zu vergleichen: Bortkewitsch, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, 1. Artikel, in Conrads Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik, 1894, November-Heft, S. 653—664.

2) Das Nähere bei Bortkewitsch, Kritische Betrachtungen zur theoretischen Statistik, 2. Artikel, in Conrads Jahrbüchern, 1895, August-Heft, S. 321—332.

ihr Verhalten nicht von Fall zu Fall, sondern von Elementarserie zu Elementarserie ändern.

Es wäre selbstverständlich irrig, zu glauben, dafs auch in der Wirklichkeit jede Elementarserie aus einer gleich grofsen Zahl von Versuchen bezw. Beobachtungen zu bestehen braucht. Nicht minder willkürlich wäre die Vorstellung, dafs sämtliche solidarisch wirkenden Ursachen in denselben Momenten ihr Verhalten ändern. Aber es handelt sich hier nicht darum, ein vollständig adäquates Schema für die statistischen Vorgänge zu finden. Die Erkenntnis genügt vielmehr, dafs aus der Vorstellung einer Solidarität der Einzelfälle heraus der scheinbare Widerspruch zwischen den Erwartungen der Theorie und den Ergebnissen der Erfahrung begriffen werden kann.

Ist aber die Annahme von solidarisch wirkenden Faktoren auch imstande, die Thatsache zu erklären, dafs die Discrepanz zwischen Theorie und Erfahrung, relativ genommen, d. h. an der Gröfse des relativen Fehlerexcedenten bezw. der Fehlerrelation gemessen, um so mehr abnimmt, je kleiner das Beobachtungsfeld gewählt ist?

Es erscheint auf den ersten Blick, dafs die so gestellte Frage verneint werden mufs. Dem relativen Fehlerexcedenten entspricht nämlich, nach dem neuen Schema, die Gröfse $\alpha\sqrt{\frac{k-1}{c_0(1-c_0)}}$ [s. Formel (4)], welche, bei einem gegebenen k, von n unabhängig ist. Ob also je 10 oder je 100 Elementarserien zu je einer Hauptserie verbunden sind, ändert an der Gröfse des relativen Fehlerexcedenten und der Fehlerrelation nichts. Bestimmte Werte $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ und $g_1, g_2, \ldots g_\nu$ vorausgesetzt, sind die erwähnten Gröfsen lediglich von der Zahl k abhängig.

Eine weitere Frage ist nun die, ob die Zahl k von der Gröfse des Beobachtungsfeldes ihrerseits abhängig sei.

Da sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Eine bestimmte Massenerscheinung kann als solche, d. h. ganz abgesehen von der Gröfse des Beobachtungsfeldes, durch einen bestimmten Wert von k charakterisirt sein. Gesetzt z. B. wir untersuchen die Relativzahlen der bei bestimmten Industrie- oder Verkehrszweigen verunglückten Personen, so bedingen hier die Betriebsgröfse und sonstige in der Natur der Sache liegenden Umstände eine gröfsere oder geringere Zahl von Menschenleben, welche je einem im betreffenden Industrie- oder Verkehrszweige sich ereignenden Unfall (wie z. B. Dampfkesselexplosion, Grubenkatastrophe) zum Opfer fallen. Oder man denke, wo es sich um die Relativzahlen der Ertrunkenen handelt, an die Fälle des Ertrinkens bei Bootpartien mit Rücksicht auf die Thatsache, dafs dabei meistens mehrere Personen an einem Unfall zu Grunde gehen bezw. sich der Gefahr des Ertrinkens aussetzen. Solche und ähnliche Fälle, wo das in Betracht kommende Ereignis (Tod, Verletzung u. s. w.) gleichsam haufenweise auftritt, fasse ich unter dem



Begriff der akuten Solidarität der Einzelfälle zusammen. Es ist klar, dsfs, wenn der Fehlerexcedent in der Statistik dieser Art der Solidarität seine Entstehung verdankt, es nicht zu erwarten ist, dafs sich die Gröfse desselben nach der Gröfse des Beobachtungsfeldes richten werde.

Ein anderer Fall liegt vor, wenn die solidarisch wirkenden Faktoren nicht jeweils bei einer Serie von gleich vielen Versuchen, sondern für je einen Zeitabschnitt von bestimmter Dauer ihr Verhalten nicht ändern. Man denke sich ein Beobachtungsfeld, dem eine jährliche Beobachtungszahl n entspricht, und ein anderes mit einer jährlichen Beobachtungszahl n'. Nimmt man nun an, dafs sowohl in dem einen als in dem anderen Fall ein solidarisch wirkender Faktor sein Verhalten etwa nur von Monat zu Monat oder von Woche zu Woche ändert, so wird eine Elementarserie im ersten Fall aus k, im zweiten aus k' Einzelfällen bestehen, wobei die Proportion eingehalten werden wird $\frac{k}{k'} = \frac{n}{n'}$ und man käme bezüglich der Abhängigkeit des relativen Fehlerexcedenten von der Gröfse des Beobachtungsfeldes zu folgendem Resultat: Der relative Fehlerexcedent im ersten Fall verhält sich zu dem relativen Fehlerexcedenten im zweiten Fall (bei gleichen Werten von $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ und von $g_1, g_2, \ldots g_\nu$) wie $\sqrt{k-1}$ zu $\sqrt{k'-1}$ oder auch wie $\sqrt{n - \frac{n}{k}}$ zu $\sqrt{n' - \frac{n}{k}}$. Bei grofsen Werten von n und n' und einem kleinen Werte von $\frac{n}{k}$ würde dieses Resultat sich von dem im Text gewonnenen wenig unterscheiden. Eine genaue Übereinstimmung ergiebt sich aber nur bei $n = k$ (folglich auch $n' = k'$). Ich nenne die zuletzt besprochene Modalität der Wirkung der solidarischen Ursachen chronische Solidarität der Einzelfälle.

Insofern letztere in der Statistik die Regel bilden dürfte, findet also die eigentümliche Beziehung zwischen dem Wert des relativen Fehlerexcedenten und der gröfseren oder kleineren Ausdehnung des Beobachtungsfeldes auch vom Standpunkte des in dieser Anlage ins Auge gefafsten Schemas ihre Erklärung.

Es erübrigt zu zeigen, in welcher Beziehung obige Formel (4) zu der analogen Formel (6) des § 14 steht.

Unter Anwendung der Bezeichnung

$$\frac{1}{\sigma}[(p_1 + p_2 + \cdots p_\sigma) = p_0$$

erhält man

$$E_2[(p_i' - p_0)^2] = E_2(p_i'^2) - E_1(p_0^2). \tag{5}$$

Man findet zugleich aus (1):

$$E_1(p_0^2) = c_0^2 + \frac{\alpha^2}{\mu\sigma}. \tag{6}$$



Daher, auf Grund von (2) und (6),

$$E_1[(p_i - p_0)^2] = \frac{\alpha^2(\sigma - 1)}{\mu\sigma}$$

oder auch

$$E_1\left(\sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}\right) = \frac{\alpha^2(\sigma - 1)}{\mu\sigma},$$

woraus

$$\alpha^2 = \mu E_1\left(\sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma - 1}\right) \tag{7}$$

folgt. Setzt man den Wert von α^2 aus (7) in (6) ein, so erhält man

$$c_0^2 = E_1(p_0^2) - \frac{1}{\sigma} E_1\left(\sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma - 1}\right). \tag{8}$$

Und setzt man ferner die Werte von α^2 und c_0^2 aus (7) und (8) in (3) ein, so ergiebt sich:

$$E_2(p_i'^2) = \frac{n-1}{n} E_1(p_0^2) - \frac{n-1}{n\sigma} E_1\left(\sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma - 1}\right) + \frac{1}{n} E_1(p_0) + \frac{k-1}{k} E_1\left(\sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma - 1}\right). \tag{9}$$

Der Gleichung (5) zufolge braucht man aber aus (9) $E_1(p_0^2)$ abzuziehen, um zu erhalten:

$$E_2[(p_i' - p_0)^2] = E_1\left[\frac{p_0(1 - p_0)}{n}\right] + \left(\frac{k-1}{k} - \frac{n-1}{n\sigma}\right) E_1\left(\sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma - 1}\right) \tag{10}$$

oder auch

$$E_1[(p_i' - p_0)^2] = \frac{p_0(1 - p_0)}{n} + \left(\frac{k-1}{k} - \frac{n-1}{n\sigma}\right) \sum \frac{(p_i - p_0)^3}{\sigma - 1}. \tag{11}$$

Setzt man in (11) $k = n$, so ergiebt sich in voller Übereinstimmung mit Formel (6) in § 14

$$E_1[(p_i' - p_0)^2] = \frac{p_0(1 - p_0)}{n} + \frac{n-1}{n} \sum \frac{(p_i - p_0)^2}{\sigma}. \tag{12}$$

Mithin begegnen sich in ihren rechnerischen Ergebnissen die im Text und die in dieser Anlage vertretenen Betrachtungsarten für den Fall, wo die Hauptserien aus je einer Elementarserie bestehen. Sonst fallen die Ergebnisse nicht ganz zusammen.

Jedoch dürften bei einigermafsen grofsen Werten von n und von k die betreffenden numerischen Resultate nicht merklich von einander abweichen.



Anlage 3.

Werte von $\frac{m^x e^{-m}}{1 \cdot 2 \cdots x}$
für die im Kopf der einzelnen Spalten der Tabelle angegebenen Werte von m und die links stehenden Werte von x.

	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	·9048	·8187	·7408	·6703	·6065	·5488	·4966	·4493	·4066	·3679
1	·0905	·1637	·2223	·2681	·3033	·3293	·3176	·3595	·3659	·3679
2	·0045	·0164	·0333	·0536	·0758	·0988	·1217	·1438	·1647	·1839
3	·0002	·0011	0033	·0072	·0126	·0198	·0284	·0383	·0494	·0613
4		·0001	·0003	·0007	·0016	·0030	·0050	·0077	·0111	·0153
5				·0001	·0002	·0004	·0007	·0012	·0020	·0031
6							·0001	·0002	·0003	·0005
7										·0001

	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0
0	·3329	·3012	·2725	·2466	·2231	·2019	·1827	·1653	·1496	·1353
1	·3662	·3614	·3543	·3452	·3347	·3230	·3106	·2975	·2842	·2707
2	·2014	·2169	·2303	·2417	·2510	·2584	·2640	·2678	·2700	·2707
3	·0738	·0867	·0998	·1128	·1255	·1378	·1496	·1607	·1710	·1804
4	·0203	·0260	·0324	·0395	·0471	·0551	·0636	0723	·0812	·0902
5	·0015	·0062	·0084	·0111	·0141	·0176	·0216	·0260	·0309	·0361
6	·0008	·0012	·0018	·0026	·0035	·0047	·0061	·0078	·0098	·0120
7	·0001	·0002	·0003	·0005	·0008	·0011	·0015	·0020	·0027	·0034
8			·0001	·0001	·0001	·0002	·0003	·0005	·0006	·0009
9							·0001	·0001	·0001	·0002

	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0
0	·1225	·1108	·1003	·0907	·0821	·0743	·0672	·0608	·0550	·0498
1	·2572	·2438	·2306	·2177	·2052	·1931	·1815	·1703	·1596	·1494
2	·2700	·2681	·2652	·2613	·2565	·2510	·2450	·2384	·2314	·2240
3	·1890	·1966	·2033	·2090	·2138	·2176	·2205	·2225	·2237	·2240
4	·0992	·1082	·1169	·1254	·1336	·1414	·1488	·1557	·1622	·1680
5	·0417	·0476	·0538	·0602	·0668	·0735	·0804	·0872	·0941	·1008
6	·0146	·0175	·0206	·0241	·0278	·0319	·0362	·0407	·0455	·0504
7	·0044	·0055	·0068	·0083	·0099	·0118	·0140	·0163	·0188	·0216
8	·0011	·0015	·0019	·0025	·0031	·0038	·0047	·0057	·0068	·0081
9	·0003	·0004	·0005	·0007	·0009	·0011	·0014	·0018	·0022	·0027
10	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0003	·0004	·0005	·0006	·0007
11						·0001	·0001	·0001	·0002	·0001
12										

	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4,0
0	·0451	·0408	·0369	·0334	·0302	·0273	·0247	·0224	·0202	·0183
1	·1397	·1304	·1217	·1135	·1057	·0984	·0915	·0850	·0789	·0733
2	·2165	·2087	2008	·1929	·1850	·1771	·1692	·1615	·1539	·1465
3	·2237	·2226	·2209	·2186	·2158	·2125	·2087	·2046	·2001	·1954
4	·1733	·1781	·1822	·1858	·1888	·1912	·1931	·1944	·1951	·1954
5	·1075	·1140	·1203	·1264	·1322	·1377	·1429	·1477	·1522	·1563
6	·0555	·0608	·0662	·0716	·0771	·0826	·0881	·0936	·0989	·1042
7	·0246	·0278	·0312	·0348	·0386	·0425	·0466	·0508	·0551	·0595
8	·0095	·0111	·0129	·0148	·0169	·0191	·0215	·0241	·0269	·0298
9	·0033	·0040	·0047	·0056	·0066	·0076	·0089	·0102	·0116	·0132
10	·0010	·0013	·0016	·0019	·0023	·0028	·0033	·0039	·0045	·0053
11	·0003	·0004	·0005	·0006	·0007	·0009	·0011	·0013	·0016	·0019
12	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002	·0003	·0003	·0003	·0005	·0006
13					·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002
14										·0001

	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0
0	·0166	·0150	·0136	·0123	·0111	·0101	·0091	·0082	·0074	·0067
1	·0680	·0630	·0584	·0540	·0500	·0462	·0428	·0395	·0365	·0337
2	·1393	·1323	·1254	·1188	·1125	·1063	·1005	·0948	·0894	·0842
3	·1904	·1852	·1798	·1743	·1687	·1631	·1574	·1517	·1460	·1404
4	·1951	·1944	·1933	·1917	·1898	·1875	·1849	·1820	·1789	·1755
5	·1600	·1633	·1662	·1687	·1708	·1725	·1738	·1747	·1753	·1755
6	·1093	·1143	·1191	·1237	·1281	·1323	·1362	·1398	·1432	·1462
7	·0640	·0686	·0732	·0778	·0824	·0869	·0914	·0959	·1002	·1044
8	·0328	·0360	·0393	·0428	·0463	·0500	·0537	·0575	·0614	·0653
9	·0150	·0168	·0188	·0209	·0232	·0256	·0281	·0307	·0334	·0363
10	·0061	·0071	·0081	·0092	·0104	·0118	·0132	·0147	·0164	·0181
11	·0023	·0027	·0032	·0037	·0043	·0049	·0056	·0064	·0073	·0082
12	·0008	·0009	·0011	·0014	·0016	·0019	·0022	·0026	·0030	·0034
13	·0002	·0003	·0004	·0005	·0006	·0007	·0008	·0009	·0011	·0013
14	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002	·0003	·0003	·0004	·0005
15					·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002

	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6	5,7	5,8	5,9	6,0
0	·0061	·0055	·0050	·0045	·0041	·0037	·0033	·0030	·0027	·0025
1	·0311	·0287	·0265	·0244	·0225	·0207	·0191	·0176	·0162	·0149
2	·0793	·0746	·0701	·0659	·0618	·0580	·0544	·0509	·0477	·0446
3	·1348	·1293	·1239	·1185	·1133	·1082	·1033	·0985	·0938	·0892
4	·1719	·1681	·1641	·1600	·1558	·1515	·1472	·1428	·1383	·1339
5	·1753	·1748	·1740	·1728	·1714	·1697	·1678	·1656	·1632	·1606
6	·1490	·1515	·1537	·1555	·1571	·1584	·1594	·1601	·1605	·1606
7	·1086	·1125	·1163	·1200	·1234	·1267	·1298	·1326	·1353	·1377
8	·0692	·0732	·0771	·0810	·0849	·0887	·0925	·0962	·0998	·1033
9	·0392	·0423	·0454	·0486	·0519	·0552	·0586	·0620	·0654	·0688
10	·0200	·0220	·0241	·0262	·0285	·0309	·0334	·0359	·0386	·0413
11	·0093	·0104	·0116	·0129	·0143	·0157	·0173	·0190	·0207	·0225
12	·0039	·0045	·0051	·0058	·0065	·0073	·0082	·0092	·0102	·0113
13	·0015	·0018	·0021	·0024	·0028	·0032	·0036	·0041	·0046	·0052
14	·0006	·0007	·0008	·0009	·0011	·0013	·0015	·0017	·0019	·0022
15	·0002	·0002	·0003	·0003	·0004	·0005	·0006	·0007	·0007	·0009
16	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002	·0002	·0002	·0003
17						·0001	·0001	·0001	·0001	·0001

	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6	6,7	6,8	6,9	7,0
0	·0022	·0020	·0018	·0017	·0015	·0014	·0012	·0011	·0010	·0009
1	·0137	·0126	·0116	·0106	·0098	·0090	·0082	·0076	·0070	·0064
2	·0417	·0390	·0364	·0340	·0318	·0296	·0276	·0258	·0240	·0223
3	·0849	·0806	·0765	·0726	·0688	·0652	·0617	·0584	·0552	·0521
4	·1294	·1249	·1205	·1162	·1118	·1076	·1034	·0992	·0952	·0912
5	·1579	·1549	·1519	·1487	·1453	·1420	·1385	·1349	·1314	·1277
6	·1605	·1601	·1595	·1586	·1575	·1562	·1547	·1529	·1511	·1490
7	·1399	·1418	·1435	·1450	·1462	·1472	·1480	·1486	·1489	·1490
8	·1066	·1099	·1130	·1160	·1188	·1215	·1240	·1263	·1284	·1304
9	·0723	·0757	·0791	·0825	·0858	·0891	·0923	·0954	·0985	·1014
10	·0441	·0469	·0498	·0528	·0558	·0588	·0618	·0649	·0679	·0710
11	·0245	·0265	·0286	·0307	·0330	·0353	·0377	·0401	·0426	·0452
12	·0124	·0137	·0150	·0164	·0179	·0194	·0210	·0227	·0245	·0264
13	·0058	·0065	·0073	·0081	·0089	·0099	·0108	·0119	·0130	·0142
14	·0025	·0029	·0033	·0037	·0041	·0046	·0052	·0058	·0064	·0071
15	·0010	·0012	·0014	·0016	·0018	·0020	·0023	·0026	·0029	·0033
16	·0004	·0005	·0005	·0006	·0007	·0008	·0010	·0011	·0013	·0014
17	·0001	·0002	·0002	·0002	·0003	·0003	·0004	·0004	·0005	·0006
18		·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002	·0002
19							·0001	·0001	·0001	·0001

	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8,0
0	·0008	·0007	·0007	·0006	·0006	·0005	·0005	·0004	·0004	·0003
1	·0059	·0054	·0049	·0045	·0041	·0038	·0035	·0032	·0029	·0027
2	·0208	·0194	·0180	·0167	·0156	·0145	·0134	·0125	·0116	·0107
3	·0492	·0464	·0438	·0413	·0389	·0366	·0345	·0324	·0305	·0286
4	·0874	·0836	·0799	·0764	·0729	·0696	·0663	·0632	·0602	0573
5	·1241	·1204	·1167	·1130	.1094	·1057	·1021	·0986	·0951	·0916
6	·1468	·1445	·1420	·1394	·1367	·1340	·1311	·1282	·1252	·1221
7	·1489	·1486	·1481	·1474	·1465	·1454	·1442	·1428	·1413	·1396
8	·1321	·1337	·1351	·1363	·1373	·1382	·1388	·1392	·1395	·1396
9	·1042	·1070	·1096	·1121	·1144	·1167	·1187	·1207	·1225	·1241
10	·0740	·0770	·0800	·0829	·0858	·0887	·0914	·0941	·0967	·0993
11	·0478	·0504	·0531	·0558	·0585	·0613	·0640	·0667	·0695	·0722
12	·0283	·0303	·0323	·0344	·0366	·0388	·0411	·0434	·0457	·0481
13	·0154	·0168	·0181	·0196	·0211	·0227	·0243	·0260	·0278	·0296
14	·0078	·0086	·0095	·0104	·0113	·0123	·0134	·0145	·0157	·0169
15	·0037	·0041	·0046	·0051	·0057	·0062	·0069	·0075	·0083	·0090
16	·0016	·0019	·0021	·0024	·0026	·0030	·0033	·0037	·0041	·0045
17	·0007	·0008	·0009	·0010	·0012	·0013	·0015	·0017	·0019	·0021
18	·0003	·0003	·0004	·0004	·0005	·0006	·0006	·0007	·0008	·0009
19	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002	·0002	·0003	·0003	·0003	·0004
20			·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002
21									·0001	·0001

	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
0	·0003	·0003	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0002	·0001
1	·0025	·0023	·0021	·0019	·0017	·0016	·0014	·0013	·0012	·0011
2	·0100	·0092	·0086	·0079	·0074	·0068	·0063	·0058	·0054	·0050
3	·0269	·0252	·0237	·0222	·0208	·0195	·0183	·0171	·0160	·0150
4	·0544	·0517	·0491	·0467	·0443	·0420	·0398	·0377	·0357	·0337
5	·0882	·0849	·0816	·0784	·0752	·0722	·0692	·0663	·0635	·0607
6	·1191	·1160	·1128	·1097	·1066	·1035	·1003	·0972	·0941	·0911

	8,1	8,2	8,3	8,4	8,5	8,6	8,7	8,8	8,9	9,0
7	·1378	·1358	·1338	·1317	·1294	·1271	·1247	·1222	·1197	·1171
8	·1395	·1392	·1388	·1383	·1375	·1366	·1356	·1344	·1332	·1318
9	·1256	·1269	·1280	·1291	·1299	·1306	·1311	·1315	·1317	·1318
10	·1017	·1040	·1063	·1084	·1104	·1123	·1140	·1157	·1172	·1186
11	·0749	·0776	·0802	·0828	·0853	·0878	·0902	·0926	·0948	·0970
12	·0506	·0530	·0555	·0580	·0604	·0629	·0654	·0679	·0703	·0728
13	·0315	·0334	·0354	·0374	·0395	·0416	·0438	·0459	·0482	·0504
14	·0182	·0196	·0210	·0225	·0240	·0256	·0272	·0289	·0306	·0324
15	·0098	·0107	·0116	·0126	·0136	·0147	·0158	·0169	·0182	·0194
16	·0050	·0055	·0060	·0066	·0072	·0079	·0086	·0093	·0101	·0109
17	·0024	·0026	·0029	·0033	·0036	·0040	·0044	·0048	·0053	·0058
18	·0011	·0012	·0014	·0015	·0017	·0019	·0021	·0024	·0026	·0029
19	·0005	·0005	·0006	·0007	·0008	·0009	·0010	·0011	·0012	·0014
20	·0002	·0002	0002	·0003	·0003	·0004	·0004	·0005	·0005	·0006
21	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002	·0002	·0002	·0003
22					·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001

	9,1	9,2	9,3	9,4	9,5	9,6	9,7	9,8	9,9	10,0
0	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	
1	·0010	·0009	·0009	·0008	·0007	·0007	·0006	·0005	·0005	·0005
2	·0046	·0043	·0040	·0037	·0034	·0031	·0029	·0027	·0025	·0023
3	·0140	·0131	·0123	·0115	·0107	·0100	·0093	·0087	·0081	·0076
4	·0319	·0302	·0285	·0269	·0254	·0240	·0226	·0213	·0201	·0189
5	·0581	·0555	·0530	·0506	·0483	·0460	·0439	·0418	·0398	·0378
6	·0881	·0851	·0822	·0793	·0764	·0736	·0709	·0682	·0656	·0631
7	·1145	·1118	·1092	·1064	·1037	·1010	·0983	·0955	·0928	·0901
8	·1302	·1286	·1269	·1251	·1232	·1212	·1191	·1170	·1148	·1126
9	·1317	·1315	·1311	·1306	·1300	·1293	·1284	·1273	·1263	·1251
10	·1198	·1210	·1219	·1228	.1235	·1241	·1245	·1248	·1250	·1251
11	·0991	·1012	·1031	·1049	·1067	·1083	·1098	·1112	·1125	·1137
12	·0752	·0776	·0799	·0822	·0844	·0866	·0888	·0908	·0929	·0948
13	·0526	·0549	·0572	·0594	·0617	·0640	·0662	·0685	·0707	·0729
14	·0342	·0361	·0380	·0399	·0419	·0439	·0459	·0479	·0500	·0521
15	·0208	·0221	·0235	·0250	·0265	·0281	·0297	·0313	0330	·0347
16	·0118	·0127	·0137	·0147	·0158	·0169	·0180	·0192	·0204	·0217
17	·0063	·0069	·0075	·0081	·0088	·0095	·0103	·0111	0119	·0128
18	·0032	·0035	·0039	·0042	·0046	·0051	·0055	·0060	·0065	·0071
19	·0015	·0017	·0019	·0021	·0023	·0026	·0028	·0031	·0034	·0037
20	0007	·0008	·0009	·0010	·0011	·0012	·0014	·0015	·0017	·0019
21	·0003	·0003	·0004	·0004	·0005	·0006	·0006	·0007	0008	·0009
22	·0001	·0001	·0002	·0002	·0002	·0002	·0003	·0003	·0004	·0004
23		·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0001	·0002	·0002
24								·0001	·0001	·0001





